

1. KURSSIKOE 29.10.2008  
FUNKTIOTEORIA I

1.1. **Tehtävä.** a) (4 pistettä) Etsi yhtälön  $z^2 = -1 - i\sqrt{3}$  kaikki ratkaisut.

b) Olkoot  $z_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , siten, että  $|z_k| = 1$  kaikilla  $k = 1, 2, 3$  ja  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . Osoita, että

$$b.1) \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$$

$$b.2) \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 0.$$

( b.1-kohta 1 piste ja b.2-kohta 1 piste.)

1.2. **Tehtävä.** Olkoon  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  kompleksivuuttujan kompleksiarvoinen funktio.

a) Oletetaan, että funktio  $f$  on analyyttinen. Osoita, että funktion  $f$  Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa jokaisessa kiekon  $D(0, 1)$  pisteessä.

b) Oletetaan, että funktion  $f$  Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa pisteessä  $z_0 \in D(0, 1)$ . Osoita esimerkiksi, että funktio  $f$  ei ole välttämättä kompleksisesti derivoituva pisteessä  $z_0$ .

(a-kohta 5 pistettä ja b-kohta 1 piste.)

1.3. **Tehtävä.** (6 pistettä) Olkoon  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  jono kompleksilukuja siten, että  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ , mutta  $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| = \infty$ . Osoita, että potenssisarjan  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  suppenemissäde on 1.

1.4. **Tehtävä.** (6 pistettä) Etsi yhtälön  $\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$  kaikki ratkaisut.