FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
ERILLISKOE
8.8.2007

1. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) = \int_0^1 \frac{1}{4+|t-s|} f(s)^3 ds + \frac{1}{5}e^{-t} \ , \quad t \in [0,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(0,1)$.

2. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $C(0,2)$, kun a) $f_n(t) := \cos(nt)$, b) $f_n(t) := \sum_{k=1}^{n}(t/4)^k$? Tässä $t \in [0,2]$ on muuttuja.

3. Olkoon $S : \ell^2 \to \ell^2$ siirto–operaattori

$$S : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

missä $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$. Suppeneeko operaattorijono $(S^n)_{n=1}^{\infty}$, pisteittäin tai operaattorinormin mielessä? Tässä S^n on S:n n:s iteraatti, $S^n := S^{n-1} \circ S$ kaikilla n.

4. Olkoon X välin $[-1,1] \subset \mathbf{R}$ Sobolev–avaruus $H^1(-1,1)$. Esitä avaruuden X alkio, joka ei ole klassisesti derivoituva funktio.

5. Onko bilineaaarimuoto

$$B : (f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(|x|)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(-1,1)$?

FUNKTIONAALIANALYYSI PERUSKURSSI
ERILLISKOE
19.12.2007

1.Olkoon X Banach–avaruus $C(0,1)$ eli välin $[0,1]$ jatkuvat funktiot varustettuna sup–normilla. Onko operaattori

$$S : f \mapsto g,$$

missä $f \in C(0,1)$ ja g on funktio

$$g(t) := 5tf(t^2) \quad , \qquad t \in [0,1],$$

hyvin määritely ja jatkuva lineaarikuvaus avaruudesta X avaruuteen X ?

2. Kuten tehtävä 1, mutta X on avoimella välillä $]0,1[$ määritelty Sobolev–avaruus $H^1(0,1)$ ja

$$g(t) := \int_0^1 f(s)ds \, \sin(t)$$

3. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2([0,2])$ ja sen aliavaruutta

$$X := \{f \in E \mid f(x) = f(2-x) \text{ melkein kaikilla } x \in [0,1]\}.$$

Etsi X:n ortogonaalinen komplementti ja ortogonaalinen projektio E:ltä X:lle.

4. Osoita käyttämättä luentojen tuloksia, eli suoraan määritelmän avulla, että avaruus $C(0,1)$ (vrt. tehtävä 1) on täydellinen.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
ERILLISKOE
4.3.2008

1.Olkoon X Banach–avaruus $C(0,5)$ ja Y Banach–avaruus $C(0,1)$ (eli välin $[0,5]$ ja $[0,1]$ jatkuvat funktiot varustettuna sup–normilla). Onko operaattori

$$S : f \mapsto g,$$

missä $f \in C(0,5)$ ja g on funktio

$$g(t) := 10^3 f(3t^3) \quad , \qquad t \in [0,1],$$

hyvin määritely ja jatkuva lineaarikuvaus avaruudesta X avaruuteen Y ?

2. Kuten tehtävä 1, mutta X ja Y molemmat ovat avoimella välillä $]0,1[$ määritelty Sobolev–avaruus $H^1(0,1)$ ja

$$g(t) := \int_0^1 f(s)ds \ \sin(t)$$

3. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2([0,2])$ ja sen kaksiulotteista aliavaruutta X, jonka virittävät funktiot $f_1(t) := 1$ ja $f_2(t) = t$ $(t \in [0,2])$. Mikä X:n alkio on lähinnä funktiota $g(t) = t^2$?

4. Onko

$$B := \Big\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \mid x_n \in \mathbf{R} \ , \ \sum_{n=1}^\infty n^3 |x_n|^2 \le 1 \Big\}$$

jonoavaruuden ℓ^1 suljettu osajoukko?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 13.5. 2008

1. Määrittele Banachin avaruus $L^1(0,1)$. Etsi sellainen rajoitettu jono $(f_n) \subset L^1(0,1)$, että jonolla (f_n) ei ole suppenevia osajonoja avaruudessa $L^1(0,1)$.

2. Olkoon $L^2(0,2\pi)$ reaalinen Hilbertin avaruus, missä sisätulo on

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(s)ds, \quad f,g \in L^2(0,2\pi).$$

Olkoot h_1 ja h_2 funktiot $h_1(t) = 1, h_2(t) = \cos(t)$, missä $t \in [0,2\pi]$. Esitä jokin keino millä voidaan määrätä funktion g, missä $g(t) = \sin(t), t \in [0,2\pi]$, lähin piste (suljetusta) vektorialiavaruudesta

$$M = \{ah_1 + bh_2 : a,b \in \mathbf{R}\}.$$

Laske etäisyys $dist(g,M)$.

3. Olkoon $\phi(t) = 2t$ kun $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ja $\phi(t) = 2 - 2t$ kun $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Määritellään

$$(Tf)(t) = f(\phi(t)), \quad f \in C(0,1), \ t \in [0,1].$$

Näytä että T on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$, jolle $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty$ kaikilla $f \in C(0,1)$. Onko T injektio tai surjektio?

4. Esitä Banach-Steinhausin lause, ja todista sen avulla seuraava tulos: *jos* $(a_k) \subset \mathbf{R}$ *on sellainen jono, että sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \textit{suppenee kaikilla } (x_k) \in c_0,$$

niin $(a_k) \in \ell^1$.

5. (*teoria*) Esitä Hahn-Banachin lauseen perusmuoto tapauksessa, missä skalaarikunta on $\mathbf{K}$. Johda seuraava tulos tästä peruslauseesta: *Olkoon* E *normiavaruus,* $M \subset E$ *vektorialiavaruus sekä* $u^* : M \to \mathbf{K}$ *jatkuva lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali* $x^* : E \to \mathbf{K}$, *että* $\langle x, u^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$ *kaikilla* $x \in M$ *ja* $\|x^*\| = \|u^*\|$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 12.6. 2008

1. Määrittele jonoavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \leq p < \infty$. Tutki, onko joukko

$$A = \{x = (x_k) \in \ell^p : |x_k| < k^{-2/p} \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots\}$$

avoin avaruudessa $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

2. Olkoon $L^2(-1,1)$ reaalinen Hilbertin avaruus varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds, \quad f, g \in L^2(-1,1).$$

Olkoot $f_1(s) = 1, f_2(s) = s$ kun $s \in [-1,1]$. Selitä miten voidaan laskea funktion $g(s) = s^2$, $s \in [-1,1]$, ortoprojektio $P_M g$ (suljetulle) aliavaruudelle

$$M = \{af_1 + bf_2 : a, b \in \mathbf{R}\},$$

sekä määrää $P_M g$.

3. Olkoon E Banachin avaruus sekä $K \subset E$ suljettu, rajoitettu ja konveksi osajoukko. Olkoon $f : K \to K$ sellainen kuvaus, että

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in K.$$

Osoita, että $\inf\{\|x - f(x)\| : x \in K\} = 0$. [*Idea.* Kiinnitä $z \in K$ ja tutki apukuvauksia f_n, missä

$$f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})f(x) + \frac{1}{n}z, \quad x \in K, \ n \in \mathbf{N}.$$

Tarkista, että Banachin kiintopistelauseen nojalla on olemassa $x_n \in K$ jolle $f_n(x_n) = x_n$ kun $n \in \mathbf{N}$. Tutki erotusta $x_n - f(x_n)$ kun $n \to \infty$.]

4. *(teoria)* Muotoile avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet. Johda suljetun kuvaajan lause avoimen kuvauksen lauseesta.

5. *(teoria)* Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $f_x(z) = (z|x)$ kun $x, z \in E$. Todista Fréchet-Rieszin lause: *kuvaus $x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen bijektiivinen isometria $E \to E^*$, missä E^* on avaruuden E duaali.*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 14.8. 2008

Tee viisi (5) seuraavista tehtävistä

1. Määrittele jonoavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \le p \le \infty$. Etsi rajoitettu jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$, jolla ei ole normissa $\|\cdot\|_p$ suppenevia osajonoja.

2. (*teoria*) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $F \subset H$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $x_0 \in F$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in F\}.$$

3. Asetetaan $(Uf)(t) = \int_0^t sf(s)ds$ kun $t \in [0,1]$ ja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus. Näytä, että U on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$, ja sen operattorinormi $\|U\| \le \frac{1}{2}$. Perustele lyhyesti miksi operattorilla $I - U$ on jatkuva käänteisoperaattori $(I-U)^{-1} : C(0,1) \to C(0,1)$. Edellä $C(0,1)$ on jatkuvien kuvausten $[0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama Banachin avaruus varustettuna sup-normilla, ja I on avaruuden identtinen kuvaus.

4. Olkoot A ja B lineaarikuvauksia $\ell^2 \to \ell^2$, joille $AB - BA = I$ (missä I on avaruuden ℓ^2 identtinen kuvaus). Todista, että silloin A ja B eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita. [*Idea.* Verifioi ensin induktiolla, että

$$AB^n - B^nA = nB^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Etsi tämän avulla ristiriita suurilla n jos A ja B olisivat rajoitettuja.]

5. (*teoria*) Muotoile ja todista Banach-Steinhausin lause (eli tasaisen rajoituksen periaate) operaattoriperheelle $\{T_\alpha : \alpha \in J\} \subset \mathcal{L}(E,F)$. [*Muistutus:* joukot

$$F(n,\alpha) = \{x \in E : \|T_\alpha x\| \le n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \alpha \in J,$$

ja Bairen lause (jonka sopivan version saa pitää tunnettuna).]

6. Olkoon $n \in \mathbf{N}$ kiinteä, ja

$$\mathcal{P}_n = \{p : p \text{ reaalikertoiminen polynomi, aste } deg(p) \le n\}.$$

Perustele sopivan Hahn-Banachin lauseen avulla, miksi on olemassa sellainen sup-normissa jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : C(0,1) \to \mathbb{R}$, että $\phi(p) = p'(0)$ kaikilla $p \in \mathcal{P}_n$. (Tässä $p'(0)$ on derivaatta origossa.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 12.11. 2008

Tee viisi (5) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon $C(0,1)$ jatkuvien funktioiden $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama Banachin avaruus varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Etsi rajoitettu jono $(f_n) \subset C(0,1)$ jolla ei ole suppenevia osajonoja. Perustele!

2. (i) Määrittele rajoitettujen lineaaristen operaattoreiden muodostama avaruus $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$, missä $\|\cdot\|$ on operaattorinormi ja E on Banachin avaruus.
(ii) Onko joukko

$$\{U \in \mathcal{L}(\ell^1) : \|Ue_1 - e_1\|_1 < 1\}$$

avoin joukko avaruudessa $(\mathcal{L}(\ell^1), \|\cdot\|)$, kun $e_1 = (1,0,0,\dots) \in \ell^1$?

3. Esitä miten voidaan laskea

$$\min_{a,b\in\mathbf{R}} \int_{-1}^{1} |t^2 - a - bt|^2 dt$$

tulkitsemalla tehtävää sopivan Hilbertin avaruuden minimointiongelmaksi. Perustele miksi kyseinen minimi on olemassa.

4. (*teoria*) Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(E)$ sellainen jatkuva lineaarinen operaattori että $\|T\| < 1$. Osoita, että $I - T$ on kääntyvä operaattori $E \to E$ ja

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots.$$

Tässä I on identtinen kuvaus $E \to E$.

5. (*teoria*) Muotoile avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet. Todista suljetun kuvaajan lause lähtien avoimen kuvauksen lauseesta.

6. (*teoria*) Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $f_x(z) = (z|x)$ kun $x, z \in E$. Todista Fréchet-Rieszin lause: *kuvaus $x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen bijektiivinen isometria $E \to E^*$, missä E^* on avaruuden E duaali.*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 17.12. 2008

Tee viisi (5) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon c_0 reaalijonojen $x = (x_n)$, joille $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, muodostama Banachin avaruus varustettuna sup-normilla $\|\cdot\|_\infty$. Onko joukko

$$A = \{x = (x_n) \in c_0 : x_n > 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}\}$$

avoin avaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$? Perustele!

2. (i) Määrittele mitä tarkoitetaan vektoriarvoisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppenemisella Banachin avaruudessa E, kun $(x_n) \subset E$ on annettu jono. (ii) Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{n} \frac{t^n}{n}$ jatkuvien funktioiden avaruudessa $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$? [Kurssin *Analyysi II* tietoja saa tässä pitää tunnettuina.]

3. (*teoria*) Todista Besselin epäyhtälö

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in E,$$

missä E on Hilbertin avaruus ja $(x_n) \subset E$ on ortonormaali jono.

4. Olkoon

$$(Vf)(x) = \int_0^x s^2 f(s)ds, \quad x \in [0,1], \quad f \in C(0,1).$$

(i) Näytä, että $V : C(0,1) \to C(0,1)$ on jatkuva lineaarikuvaus ja $\|V\| < 1$.
(ii) Onko V surjektio $C(0,1) \to C(0,1)$? Perustele!

5. (*teoria*) Muotoile ja todista Banach-Steinhausin lause, eli tasaisen rajoituksen periaate, operaattoriperheelle $\{T_\alpha : \alpha \in J\} \subset \mathcal{L}(E,F)$. [*Muistutus:* Bairen lause ja apujoukot $F(n,\alpha) = \{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}, \alpha \in J$.]

6. Näytä sopivan Hahn-Banachin lauseen avulla että on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* : \ell^\infty \to \mathbf{R}$, että $\|x^*\| = 1$ ja

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

kaikilla suppenevilla reaalijonoilla $x = (x_n)$. Avaruus ℓ^∞ on varustettu supnormilla.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
LOPPUKOE
3.3.2009

1.Olkoon X Banach-avaruus $C(0,1)$ eli välin $[0,1]$ jatkuvat funktiot varustettuna sup-normilla. Onko operaattori

$$S : f \mapsto g,$$

missä $f \in C(0,1)$ ja g on funktio

$$g(t) := 5tf(t^2) \ , \qquad t \in [0,1],$$

hyvin määritely ja jatkuva lineaarikuvaus avaruudesta X avaruuteen X ?

2. Kuten tehtävä 1, mutta X on avoimella välillä $]0,1[$ määritelty Sobolev-avaruus $H^1(0,1)$ ja

$$g(t) := \int_0^1 f(s)ds \ \sin(t)$$

3. Tarkastellaan Hilbert-avaruutta $E := L^2([0,2])$ ja sen aliavaruutta

$$X := \{f \in E \mid f(x) = f(2-x) \text{ melkein kaikilla } x \in [0,1]\}.$$

Etsi X:n ortogonaalinen komplementti ja ortogonaalinen projektio E:ltä X:lle.

4. Osoita käyttämättä luentojen tuloksia, eli suoraan määritelmän avulla, että avaruus $C(0,1)$ (vrt. tehtävä 1) on täydellinen.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
ERILLISKOE
KESÄKUU 2009 11.6.09

1. Onko bilineaarimuoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(|x-1|)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0,2)$?

2. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2(0,5)$ ja sen aliavaruutta

$$X := \{f \in E \mid f(x) = f(5-x) \text{ melkein kaikilla } x \in [0,5]\}.$$

Etsi X:n ortogonaalinen komplementti ja ortogonaalinen projektio E:ltä X:lle.

3. Ratkaise integraaliyhtälö

$$5\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2-1}}{1+100|t|} f(s)ds = f(t) + e^{-t^2}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

missä $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on tuntematon funktio. Neuvo. Käytä sopivasti valittua funktioavaruutta ja normia.

4. Osoita esimerkillä, käyttämättä luentojen tuloksia, että jatkuvien, välin $[0,5]$ reaaliarvoisten funktioiden avaruus $C(0,5)$ ei ole täydellinen, kun se varustetaan normilla

$$\|f\| := \Big(\int_0^5 |f(x)|^3 dx \Big)^{1/3}.$$

Toisin sanoen, esitä esimerkki Cauchyn jonosta, joka ei suppene ko. avaruudessa.