Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
2. kurssikoe 6.5. 2008

Tee neljä (4) seuraavista tehtävistä.

1. (*teoria*) Olkoon E separoituva Hilbertin avaruus. Määrittele avaruuden E Hilbertin kanta (e_n). Esitä kolme yhtäpitävää ehtoa, joiden avulla voidaan tarkistaa onko annettu jono $(e_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset E$ avaruuden Hilbertin kanta. [Muotoilu riittää, ehtoja ei tarvitse todistaa yhtäpitäviksi !]

2. Olkoon $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ kiinteä jatkuva kuvaus jolle

$$\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| < 1.$$

Näytä Neumannin sarjan avulla, että ehto $U(f) = f - g \cdot f$, missä $f \in C(0,1)$, määrittelee kääntyvän operaattorin $U : C(0,1) \to C(0,1)$, ja määrää käänteisoperaattori U^{-1}. Tässä $(g \cdot f)(x) = g(x)f(x)$ kun $x \in [0,1]$.

3. (i) Esitä suljetun kuvaajan lauseen sisältö. (ii) Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset E$ sellainen jono, että $\sum_{n=1}^\infty |\langle x_n, x^*\rangle| < \infty$ kaikilla jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla $x^* \in E^*$. Osoita, että tällöin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle x_n, x^*\rangle| \le C\|x^*\| \quad \text{kaikilla } x^* \in E^*.$$

[*Idea.* Sovella suljetun kuvaajan lause lineaariseen kuvaukseen $U : E^* \to \ell^1$, missä $U(x^*) = (\langle x_n, x^*\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ kun $x^* \in E^*$.]

4. (*teoria*) Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $f_x(z) = (z|x)$ kun $x, z \in E$. Todista Fréchet-Rieszin lause: *kuvaus $x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen bijektiivinen isometria $E \to E^*$.*

5. Perustele miksi on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \to \mathbf{R}$, että $\|\phi\| = 1$ ja $\phi(f) = f(\frac{1}{3})$ kaikilla *jatkuvilla* funktiolla $f \in C(0,1)$.

Muista myös kurssikysely

http://www.math.helsinki.fi/kurssit/kysely/