

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi

2. välikoe

14.5.2004

1. Mitä sanovat Bairen kategorialause ja Banach-Steinhausin tasaisen rajoituksen periaate? Selitä lyhyesti, miten edellistä voi käyttää jälkimmäisen todistuksessa.
2. Määrittele normiavaruuden jonon heikko suppeneminen. Mitä voidaan sanoa jonon (e_i) suppenemisesta l^p -avaruuksissa, kun $1 \leq p < \infty$? Tässä e_i :n i :s koordinaatti on 1 ja muut nolliä.
3. Osoita, että jos H on Hilbertin avaruus ja L on jatkuva lineaarinen bijektio $H \rightarrow H$, niin L on kompakti, jos ja vain jos H on äärellisulotteinen.
4. Määrittele normiavaruuden refleksiivisyys. Onko l^1 refleksiivinen? Miten tämä voidaan osoittaa tuntematta kaikkia asiaan vaikuttavia duaaleja? Osoita, jos aikaa jää, että refleksiivisen Banachin avaruuden jokainen suljettu vektorialiavaruus on refleksiivinen.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI

2. KURSSIKOE

8.5.2007

1. Olkoon $1 < p < \infty$ ja q tämän duaaliekspONENTTI. Olkoon $L^p(0, 5)$ avoimella välillä $]0, 5[$ määritelty L^p -avaruus. Tunnetusti $L^q(0, 5)$ voidaan samaistaa $L^p(0, 5)$:n duaalin kanssa kaavalla

$$\langle f, g \rangle := \int_0^5 f(x)g(x)dx,$$

missä $f \in L^p(0, 5)$ ja $g \in L^q(0, 5)$. Mikä $g \in L^q(0, 5)$ vastaa L^p :n duaalin alkiota

$$f \mapsto \int_0^5 f(5-x) \sin(x) dx?$$

2. Onko bilineaarimuoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(|x-1|)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0, 2)$?

3. Onko normi

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 e^{-x^2} dx + \int_0^1 (1+x^2)|f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

ekvivalentti Sobolev-avaruuden $H^1(0, 1)$ tavanomaisen normin kanssa?

4. Selitä lyhyesti, mikä on heikko ratkaisu ja miten sen olemassaolo voidaan todistaa Sturm-Liouvillen probleemalle

$$-((1+x^2)u')' + e^{-x^2}u = 0, \quad \text{kun } x \in [0, 1]$$

$$u(0) = 3, \quad u(1) = 4,$$

missä $u : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ on tuntematon funktio ja $'$ merkitsee derivaattaa x :n suhteen.