Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
1. kurssikoe 29.2. 2008

Tee neljä (4) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon E reaalikertoiminen Hilbertin avaruus. Näytä, että

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y), \quad x, y \in E. \tag{1}$$

Näytä kaavan (1) avulla: jos $T : E \to E$ on lineaarikuvaus, jolle $\|Tu\| = \|u\|$ kaikilla $u \in E$, niin $(Tx|Ty) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in E$.

2. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono. Määrittele vektoriarvoisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppeneminen avaruudessa E. Tutki jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} e_n$$

suppenee avaruudessa ℓ^1, missä $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (ykkönen n:nnellä paikalla) kun $n \in \mathbf{N}$.

3. Olkoon $C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} | \ f \text{ jatkuva}\}$ varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinteä funktio, ja

$$(U(f))(t) = g(t)f(t) + \int_0^1 f(s)ds, \quad t \in [0,1], f \in C(0,1).$$

Näytä, että U on jatkuva lineaarikuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Määrää operaattorinormi $\|U\|$ jos oletetaan että $g(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$.

4. (*teoria*) Määrittele jonoavaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \leq p \leq \infty$. Todista kolmioepäyhtälö normille $\|\cdot\|_p$ Hölderin epäyhtälön avulla tapauksessa $1 < p < \infty$. (Hölderin epäyhtälön saa olettaa tunnetuksi.)

5. (*teoria*) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $F \subset H$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $x_0 \in F$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in F\}.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
1. kurssikoe 29.2. 2008

Tee neljä (4) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon E reaalikertoiminen Hilbertin avaruus. Näytä, että

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y), \quad x, y \in E. \tag{1}$$

Näytä kaavan (1) avulla: jos $T : E \to E$ on lineaarikuvaus, jolle $\|Tu\| = \|u\|$ kaikilla $u \in E$, niin $(Tx|Ty) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in E$.

2. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono. Määrittele vektoriarvoisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppeneminen avaruudessa E. Tutki jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} e_n$$

suppenee avaruudessa ℓ^1, missä $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ykkönen n:nnellä paikalla) kun $n \in \mathbf{N}$.

3. Olkoon $C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} | \ f \text{ jatkuva}\}$ varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinteä funktio, ja

$$(U(f))(t) = g(t)f(t) + \int_0^1 f(s)ds, \quad t \in [0,1], f \in C(0,1).$$

Näytä, että U on jatkuva lineaarikuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Määrää operaattorinormi $\|U\|$ jos oletetaan että $g(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$.

4. (*teoria*) Määrittele jonoavaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \leq p \leq \infty$. Todista kolmioepäyhtälö normille $\|\cdot\|_p$ Hölderin epäyhtälön avulla tapauksessa $1 < p < \infty$. (Hölderin epäyhtälön saa olettaa tunnetuksi.)

5. (*teoria*) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $F \subset H$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $x_0 \in F$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in F\}.$$