Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Välikoe 1
15.3.2004

1. Onko $\{ (x_i) \in l^1 : \lim_{i\to\infty} i^2 x_i = 0 \}$ a) suljettu, b) tiheä avaruudessa l^1?

2. Olkoon
$$Lf(x) = \int_0^x tf(t)\,dt, x \in [0,1],$$
kun $f \in C([0,1])$. Varustetaan $C([0,1])$ sup-normilla. Osoita, että $L : C([0,1]) \to C([0,1])$ on jatkuva lineaarikuvaus, ja määritä sen normi.

3. Olkoon F Hilbertin avaruuden H suljettu vektorialiavaruus. Määrittele ortoprojektio $P_F : H \to F$. Todista lause: Jos $x \in H$ ja $y \in F$, niin $y = P_F(x)$, jos ja vain jos $x - y \in F^\perp$.

4. Olkoon V Hilbertin avaruuden H vektorialiavaruus. Osoita, että V on tiheä H:ssa, jos ja vain jos ehdosta $(x|v) = 0$ kaikille $v \in V$ seuraa, että $x = 0$.

FUNKTIONAALIANALYYSI
VÄLIKOE 1
31.3.2005

1. Ovatko seuraaavat lineaariset operaattorit hyvin määriteltyjä ja rajoitettuja operaattoreita Banach–avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1:

$$T : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (k^{-1} x_{k+2})_{k=1}^{\infty},$$

$$S : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_8 + k^{-4} x_k)_{k=1}^{\infty},$$

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\cos(\pi t/2) + \int_0^1 \frac{e^{-50s}}{1+t} f(s)^3 ds - f(t) = 1$$

on ratkaisu avaruudessa $C(0,1)$.

3. Ovatko joukot

$$A := \{f \in C(-2,2) \mid f(0) + f(1) = 3\}$$

ja

$$B := \{f \in C(-2,2) \mid |f(0) + f(1)| \leq 3\}$$

avaruuden $C(-2,2)$ (eli välin $[-2,2]$ jatkuvat reaaliarvoiset kuvaukset, sup–normi) suljettuja osajoukkoja? Sisältääkö kumpikaan joukoista avointa $C(-2,2)$:n osajoukkoa?

4. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2([-1,1])$ ja sen aliavaruutta

$$X := \{f \in E \mid f(x) + f(x-1) = 0 \text{ melkein kaikilla } x \in [0,1]\}.$$

Etsi X:n ortogonaalinen komplementti ja ortogonaalinen projektio E:ltä X:lle.
Onko ortogonaalinen projektiosi (jolle olet toivon mukaan löytänyt konkreettisen lausekkeen) myös hyvin määritelty ja rajoitettu operaattori avaruudessa $C(-1,1)$ (sup–normi)?

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
1. Välikoe 3.3.2006

Vastaa valintasi mukaan **neljään** tehtävään.

1. Osoita, että Banachin avaruuksien suppenevat jonot ovat rajoitettuja. Anna esimerkki avaruuden $C(0,1)$ rajoitetusta jonosta, jolla ei ole suppenevia osajonoja.

2. Anna esimerkki Banachin avaruudesta E ja sarjasta $\sum x_n$ sen alkioita, niin että sarja on E:ssä suppeneva, mutta ei normisuppeneva.
Entä, suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ avaruudessa $C(0,1)$?

3. Olkoon Hilbertin avaruus $E = L^2(-1,1)$ varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Tarkastellaan vektorialivaruutta $M \subset E$ jonka virittävät E:n vektorit $f(x) = x$ ja $g(x) \equiv 1$, $x \in [-1,1]$. Määrää funktion $h(x) = e^x$ etäisyys alivaruudesta M, kun E:n metriikkana sisätulon määräämä normimetriikka.

4. Olkoon E separoituva Hilbertin avaruus ja $e_n, n = 1,2,\ldots$ ortonormaali jono avaruudessa E.
i) Todista Besselin epäyhtälö

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|(x|e_n)\big|^2 \le \|x\|^2, \qquad \text{kaikilla } x \in E.$$

ii) Esitä (ilman todistusta) kaksi eri ehtoa, joiden avulla voidaan tarkistaa onko annettu ortonormaali jono (e_n) Hilbertin kanta avaruudessa E.

5. Kun $x = (x_k)_1^{\infty} \in \ell^1$, asetetaan uusi lukujono kaavalla $Tx = \left(\sum_{n=k}^{\infty} x_n\right)_{k=1}^{\infty}$.
Osoita, että $Tx \in c_0$ aina kun $x \in \ell^1$ ja selvitä onko näin määritelty kuvaus jatkuva operaattori $T : \ell^1 \to c_0$? [c_0:n normina $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$.]
Onko kuvauksen T normi $\|T\| < \infty$? Jos on, määrää $\|T\|$.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
1. KURSSIKOE
5.3.2007

1. Ovatko seuraavat lineaariset operaattorit hyvin määriteltyjä ja rajoitettuja operaattoreita Banach–avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1:

$$T : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (2^{-k} x_k)_{k=1}^{\infty},$$

$$S : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_{2k} + 2^{-k} x_k)_{k=1}^{\infty},$$

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) = \int_0^{10} \frac{1}{(1+t+1000s)^2} f(s)^2 ds + e^{-t} + 1$$

on ratkaisu avaruudessa $C(0,10)$.

3. Onko normi

a) $\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} (1+t)|f(t)|$, b) $\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} t|f(t)|$,

ekvivalentti avaruuden $C(0,1)$ tavanomaisen sup–normin kanssa?

4. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2([0,4])$ ja sen 2–ulotteista aliavaruutta M, jonka virittävät vakiofunktio 1 ja funktio $f(t) := t$. Esitä ortogonaalisen projektion P_M lauseke (ortoprojektio E:ltä M:lle).