Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 20.1. 2004

Vastaa valintasi mukaan **viiteen** tehtävään.

1. Tarkastellaan joukkoa $A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1 : |x_n| < n^{-2},\ \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Onko A avoin avaruudessa l^1 ? Onko A rajoitettu ? Entä onko joukko $B = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1 : x_n \leq 0\}$ suljettu avaruudessa l^1 ?

2. Olkoon $f(x) = |x|$ ja $g(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$. Olkoon M funktion g virittämä $L^2(-1, 1)$:n suljettu vektorialiavaruus. Määrää $dist(f, M)$, so. $L^2(-1, 1)$:n metriikan mielessä laskettu funktion f etäisyys aliavaruudesta M.

3. Olkoon $T : C(0, 1) \to l^\infty$ kuvaus $Tf = \big(f(2^{-n})\big)_{n=1}^{\infty}$. Osoita, että T on jatkuva lineaarinen kuvaus $T : C(0, 1) \to l^\infty$. Määrää T:n operaattorinormi $\|T\|$. Onko T surjektio tai injektio ?

4. (*teoria*) Muotoile ja todista suljetun kuvaajan lause. Voit olettaa tunnetuksi avoimen kuvauksen lauseen.

5. Anna esimerkki rajoitetusta jonosta $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset l^1$, jolla ei ole heikosti suppenevaa osajonoa. [muista: $(l^1)' = l^\infty$]

6. Olkoon $K(x, y) = \cos(x - y)$ sekä $h \in C(0, \pi)$. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\,dy + h(x), \qquad x \in [0, \pi],$$

on tasan yksi ratkaisu $f \in C(0, \pi)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
loppukoe
25.5.2004

1. Anna esimerkki normiavaruudesta, joka ei ole täydellinen. Perustele väitteesi.

2. Osoita, että asettamalla $Lx = (y_j)$, missä $x = (x_j) \in l^3$ ja $y_j = e^{-1/j}x_j$, $j = 1, 2, \dots$, saadaan jatkuva lineaarikuvaus $L : l^3 \longrightarrow l^3$. Määritä sen normi.

3. Esitä Hahn-Banachin lause (joku versio ilman todistusta). Miten sen avulla voidaan todistaa, että on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $f : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$ kaikille $x \in l^1$ ja $f(1, 1, \dots) = 1$.

4. Esitä avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet ja todista toinen toisen avulla (mutta ei molempia).

5. Olkoon H kompleksikertoiminen Hilbertin avaruus ja $L : H \longrightarrow H$ jatkuva itseadjungoitu (self adjoint) lineaarikuvaus. Olkoon λ kompleksiluku siten, että jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $x \in H$ siten, että $\|x\| = 1$ ja $\|Lx - \lambda x\| < \epsilon$. Osoita, että λ on reaalinen. Onko λ välttämättä L:n ominaisarvo?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
loppukoe
18.6.2004

1. Anna esimerkki normiavaruudesta, joka ei ole täydellinen. Perustele väitteesi.

2. Osoita, että asettamalla $Lx = (y_j)$, missä $x = (x_j) \in l^3$ ja $y_j = e^{-1/j}x_j$, $j = 1, 2, \dots$, saadaan jatkuva lineaarikuvaus $L : l^3 \to l^3$. Määritä sen normi.

3. Esitä Hahn-Banachin lause (joku versio ilman todistusta). Miten sen avulla voidaan todistaa, että on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $f : l^\infty \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$ kaikille $x \in l^1$ ja $f(1, 1, \dots) = 1$.

4. Esitä avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet ja todista toinen toisen avulla (mutta ei molempia).

5. Olkoon H kompleksikertoiminen Hilbertin avaruus ja $L : H \to H$ jatkuva itseadjungoitu (self adjoint) lineaarikuvaus. Olkoon λ kompleksiluku siten, että jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $x \in H$ siten, että $\|x\| = 1$ ja $\|Lx - \lambda x\| < \epsilon$. Osoita, että λ on reaalinen. Onko λ välttämättä L:n ominaisarvo?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
loppukoe
10.8.2004

1. Onko $C([0,1])$ varustettuna L^1-normilla a) täydellinen, b)separoituva? Perustele väitteesi.

2. Kaikille reaalilukujonoille $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ asetetaan $Lx = (x_j/j)_{j=1}^{\infty}$. Millä p:n ja q:n, $1 \leq p, q \leq \infty$, arvoilla L on jatkuva lineaarikuvaus $l^p \to l^q$? Määritä L:n normi näissä tapauksissa.

3. Määrittele normiavaruden refleksiivisyys. Osoita, että jokainen Hilbertin avaruus on refleksiivinen.

4. Mitä tarkoittaa jonon heikko suppeneminen Banachin avaruudessa? Anna jossain Banachin avaruudessa esimerkki rajoitetusta jonosta, jolla ei ole heikosti suppenevaa osajonoa.

5. Olkoon H kompleksikertoiminen Hilbertin avaruus ja $L : H \to H$ jatkuva itseadjungoitu ja kompakti lineaarikuvaus. Osoita käyttämättä tällaisten operaattoreiden spektraalilausetta, että L:llä voi olla vain äärellinen määrä ominaisarvoja λ siten, että $\lambda \geq 1$. Miten tämä seuraa spektraalilauseesta?

FUNKTIONAALIANALYYSI PERUSKURSSI
LOPPUKOE
24.5.2005

1.Onko lineaarioperaattori

$$S : (a_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (n^{-1} a_n)_{n=1}^{\infty}$$

jatkuva eli rajoitettu avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1 ? Samoin,

$$T : (a_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (\sqrt{n} a_n)_{n=1}^{\infty}$$

avaruudesta ℓ^3 avaruuteen ℓ^∞ ?

2. Onko integraaliyhtälöllä

$$\int_{-2}^{2} \frac{e^{-1000|s|}}{1+t^2} f(s)^4 ds = f(t) - \frac{1}{|\sin t| + 2e^{|t|}}, \qquad t \in [-2, 2]$$

ratkaisua avaruudessa $C(-2, 2)$?

3. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2([0, 2])$ ja sen aliavaruutta

$$X := \{f \in E \mid f(x) = f(2-x) \text{ melkein kaikilla } x \in [0, 1]\}.$$

Etsi X:n ortogonaalinen komplementti ja ortogonaalinen projektio E:ltä X:lle.

4. Osoita käyttämättä luentojen tuloksia, eli suoraan määritelmän avulla, että jonoavaruus ℓ^∞ (sup–normi) on täydellinen. Vihje. Ota Cauchyn jono avaruudessa ℓ^∞. Tarkastele mielivaltaista, kiinnitettyä koordinaattia, ja osoita, että ko. koordinaatin muodostama lukujono suppenee. Tästä löydät Cauchy–jonon raja–arvon.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe
10.8.2005

1.Onko lineaarioperaattori

$$S : f(x) \mapsto \frac{1}{x^{1/4}} f(x) \ , \qquad x \in]0,2[$$

jatkuva eli rajoitettu avaruudesta $L^2(0,2)$ avaruuteen $L^1(0,2)$? Samoin,

$$T : f(x) \mapsto \sqrt{x} f(x) \ , \qquad x \in]0,2[$$

avaruudesta $L^1(0,2)$ avaruuteen $L^2(0,2)$?

2. Ratkaise lineaarinen integraaliyhtälö

$$5 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|s|}}{1+100|t|} f(s)ds = f(t) + e^{-t^2} \ , \qquad t \in \mathbf{R},$$

missä $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on tuntematon funktio.

3. Olkoon $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Kuvaus λ,

$$\lambda(f) = \int_0^2 \frac{1}{2+\sin x} f(2-x)dx$$

on jatkuva ja lineaarinen $L^p(0,2) \to \mathbf{R}$. Mikä avaruuden $L^q(0,2)$ alkio vastaa λ:aa, kun $L^q(0,2)$ samaistetaan tavalliseen tapaan $L^p(0,2)$:n duaalin kanssa?

4. Osoita esimerkillä, käyttämättä luentojen tuloksia, että jatkuvien, välin $[0,5]$ reaaliarvoisten funktioiden avaruus $C(0,5)$ ei ole täydellinen, kun se varustetaan normilla

$$\|f\| := \Big(\int_0^5 |f(x)|^3 dx \Big)^{1/3}.$$

Toisin sanoen, esitä esimerkki Cauchyn jonosta, joka ei suppene ko. avaruudessa.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
LOPPUKOE
25.10.2005

1. Onko bilineaarimuoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(|x-1|)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0,2)$?

2. Totea, että jokainen $g \in L^1(0,1)$ määrittelee avaruuden $C(0,1)$ duaalin alkion kaavalla

$$f \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Oletetaan, että kerroinkunta on $\mathbf{R}$, että g on jatkuva ja $g(x) > 0$ kaikilla x. Osoita tässä erikoistapauksessa, että g:n duaalinormi on sama kuin $\|g\|_{L^1}$.

3. Ratkaise lineaarinen integraaliyhtälö

$$5\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2-1}}{1+100|t|} f(s)ds = f(t) + e^{-t^2}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

missä $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on tuntematon funktio. Neuvo. Käytä sopivasti valittua funktioavaruutta ja normia.

4. Onko normi

$$\|f\|_w := \sup_{x\in[0,1]} w(x)|f(x)|$$

ekvivalentti avaruuden $C(0,1)$ tavanomaisen sup–normin kanssa, kun w on painofunktio
a) $w(x) := x^3$
b) $w(x) := 1 + x^3$?

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe, 18. 5. 2006

Vastaa valintasi mukaan 5 tehtävään.

1. (teoria) Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarikuvaus. Määrittele operaattorinormi $\| T \|$ ja osoita, että T on jatkuva jos ja vain jos T on rajoitettu. Anna lisäksi esimerkki epäjatkuvasta lineaarikuvauksesta.

2. Olkoon $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ kuvaus
$$K(x,y) = \begin{cases} 1, & y \leq x, \\ -1, & y > x. \end{cases}$$
Olkoon $(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$ ja olkoon $1 < p < \infty$. Näytä, että kuvaus $T\colon L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ on jatkuva lineaarikuvaus ja määrää $\| T \|$. Onko T injektio tai surjektio?

3. (teoria) Muotoile ja todista Fréchet–Rieszin lause.

4. Olkoon E Banachin avaruus, $T \in \mathscr{L}(E)$ ja olkoon $\| T^n \| = a_n > 0$ jokaisella $n \geq 1$. Osoita, että jos $\inf a_n = 0$, niin operaattori $\lambda I - T$ on kääntyvä jokaisella $\lambda \neq 0$. [Vihje: Neumannin sarja ja $\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T) P(\lambda, T) = P(\lambda, T)(\lambda I - T)$ jollakin polynomilla P.]

5. Normiavaruuden E osajoukkoa $A \subset E$ sanotaan heikosti rajoitetuksi, jos $\sup\{\, |\langle x, x' \rangle| : x \in A \,\} < \infty$ kaikilla $x' \in E'$. Osoita, että jokainen heikosti rajoitettu osajoukko A on rajoitettu myös normin mielessä eli $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$.

6. Määrää funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$
Fourier-sarjan avulla summa
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
LOPPUKOE
20.12.2006

1. Ovatko seuraaavat lineaariset operaattorit hyvin määriteltyjä ja rajoitettuja operaattoreita Banach–avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1:

a) $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (k^{-1}x_{k+5})_{k=1}^\infty$, b) $S : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_5 + k^{-5}x_k)_{k=1}^\infty$.

2. Olkoon $C(0,5)$ välin $[0,5]$ jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden muodostama Banach–avaruus, varustettuna tavanomaisella sup–normilla. Määritellään kuvaus $h : C(0,5) \to \mathbf{R}$

$$h(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k + \pi/2)}{5^k} f(1/k)$$

kun $f \in C(0,5)$. Näytä, että h on duaalin $C(0,5)'$ alkio ja esitä jokin yläraja–arvio h:n normille.

3. Onko normi

$$\|f\|_w := \sup_{x\in[0,1]} w(x)|f(x)| \tag{1}$$

ekvivalentti avaruuden $C(0,1)$ tavanomaisen sup–normin kanssa, kun w on painofunktio a) $w(x) := 1 + x^2$, b) $w(x) := \sin x$.

4. Tarkastellaan jatkuvien lineaaristen operaattorien $T_n : X \to Y$ muodostamia perheitä, missä $n \in \mathbf{N}$ sekä X ja Y Banach–avaruuksia. Banach–Steinhausin lauseen mukaan joko

1° on olemassa $M \in [0,\infty[$ jolle $\|T_n\| \le M$ kaikilla n, tai

2° voidaan löytää lähtöavaruuden X vektori x, jolle $\sup_{n\in\mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty$.

Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee. Mikäli 2° pätee, etsi lisäksi joku vektori $x \in X$, jolla on väitetty ominaisuus.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_k\chi_n(k))_{k=1}^\infty$, missä $\chi_n(k) = 1$, jos $k \le n$ ja $\chi_n(k) = 0$, jos $k > n$.

b) $X = Y = C(0,1)$, ja T_n on kompositio–operaattori $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$, kun $t \in [0,1]$.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
ERILLISKOE
15.5.2007

1. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $C(0,1)$, kun a) $f_n(t) := \sin(nt)$, b) $f_n(t) := \sum_{k=1}^{n}(t/2)^k$? Tässä $t \in [0,1]$ on muuttuja.

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) = \int_0^1 \frac{1}{3+|t-s|} f(s)^2 ds + \frac{1}{5}e^{-t}\ , \quad t \in [0,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(0,1)$.

3. Olkoon $S : \ell^2 \to \ell^2$ siirto–operaattori

$$S : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

missä $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$. Suppeneeko operaattorijono $(S^n)_{n=1}^{\infty}$, pisteittäin tai operaattorinormin mielessä? Tässä S^n on S:n n:s iteraatti, $S^n := S^{n-1} \circ S$ kaikilla n.

4. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $E := L^2([0,4])$ ja sen 2–ulotteista aliavaruutta M, jonka virittävät vakiofunktio 1 ja funktio $f(t) := t$. Esitä ortogonaalisen projektion P_M lauseke (ortoprojektio E:ltä M:lle).

5. Esitä Sobolev–avaruuden $H^1(0,1)$ alkio, joka ei ole klassisesti derivoituva funktio.

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
ERILLISKOE
22.5.2007

1. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\int_0^1 \frac{1}{4+|t-s|^2} f(s)^2 ds + \frac{1}{5}e^{-t} = f(t)\ , \quad t \in [0,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(0,1)$.

2. Ovatko seuraavat lineaariset operaattorit hyvin määriteltyjä ja rajoitettuja operaattoreita Banach–avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1:

$$T : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (k^{-1}x_k)_{k=1}^{\infty},$$

$$S : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (x_{2k} + 2^{-k}x_k)_{k=1}^{\infty},$$

3. Onko lauseke

a) $\|f\| := \sup_{t\in[2,4]} (1+t)|f(t)|$, b) $\|f\| := \sup_{t\in[0,5]} t|f(t)|$,

ekvivalentti avaruuden $C(0,5)$ tavanomaisen sup–normin kanssa?

4. Olkoon $1 < p < \infty$ ja q tämän duaalieksponentti. Olkoon $L^p(0,5)$ avoimella välillä $]0,5[$ määritelty L^p–avaruus. Tunnetusti $L^q(0,5)$ voidaan samaistaa $L^p(0,5)$:n duaalin kanssa kaavalla

$$\langle f, g\rangle := \int_0^5 f(x)g(x)dx,$$

missä $f \in L^p(0,5)$ ja $g \in L^q(0,5)$. Mikä $g \in L^q(0,5)$ vastaa L^p:n duaalin alkiota

$$f \mapsto \int_0^5 f(5-x)\sin(x)dx?$$

5. Onko bilineaaarimuoto

$$B : (f,g) \mapsto \int_0^4 f(x)g(|x-2|)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0,4)$?

FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
ERILLISKOE
14.6.2007

1. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\int_0^1 \frac{1}{|t-s|^2+5\pi} f(s)^2 ds + \frac{\sin t}{5} = f(t)\ , \quad t \in [0,1],$$

missä f on tuntematon funktio, on ratkaisu avaruudessa $C(0,1)$.

2. Ovatko seuraavat lineaariset operaattorit hyvin määriteltyjä ja rajoitettuja operaattoreita Banach–avaruudesta ℓ^2 avaruuteen ℓ^1:

$$T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (k^{-1}x_k)_{k=1}^\infty,$$

$$S : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_{2k} + 2^{-k}x_k)_{k=1}^\infty,$$

3. Onko bilineaaarimuoto

$$B : (f,g) \mapsto \int_0^4 f(|x-3|)g(|x-1|)dx$$

koersiivinen avaruudessa $L^2(0,4)$?

4. Onko normi

$$\|f\| := \Big(\int_0^1 |f(x)|^2(2+x^3)dx + \int_0^1 (1+x^2)|f'(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

ekvivalentti Sobolev–avaruuden $H^1(0,1)$ tavanomaisen normin kanssa?

5. Selitä lyhyesti, mikä on heikko ratkaisu ja miten sen olemassaolo voidaan todistaa Sturm–Liouvillen probleemalle

$$-((1+x^2)u')' + 2u + x^3u = 0\ , \qquad \text{kun } x \in [0,1]$$

$$u(0) = 3\ , \quad u(1) = 4,$$

missä $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ on tuntematon funktio ja $'$ merkitsee derivaattaa x:n suhteen.