Funktioteoria I
16.3.2004

1. Olkoon $f(z) = z^3 + 6z + 1$. Määrää ne arvot $a \in \mathbf{C}$ joille on olemassa z_0 siten, että z_0 on f:n useampikertainen a-kohta, t.s. z_0 funktion $f(z) - a$ useampikertainen 0-kohta.

2. Osoita, että jos f on Möbiuskuvaus jolle $f(0) = \infty$ ja $f(\infty) = 0$, niin $f^2 = f \circ f$ on identtinen kuvaus $z \mapsto z$.

3. Olkoon f koko tasossa analyyttinen funktio, joka ei ole vakio. Olkoon

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Osoita maksimiperiaatteeseen nojautuen, että $M(r)$ on aidosti kasvava kun $r \geq 0$.

4. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2} dz}{z(z+2i)}$$

kun $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

In English:

1. Let $f(z) = z^3 + 6z + 1$. Find the values $a \in \mathbf{C}$ for which there is z_0 such that z_0 is an a-place of f of order greater than 1, i.e. z_0 is a zero of the function $f(z) - a$ of order greater than one.

2. Show that if f is a Möbius transformation such that $f(0) = \infty$ and $f(\infty) = 0$, then $f^2 = f \circ f$ is the identity map $z \mapsto z$.

3. Let f be analytic in the whole complex plane and assume that f is not constant. Let

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Show using the maximum principle that $M(r)$ is properly increasing for $r \geq 0$.

4. Compute the integral

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2} dz}{z(z+2i)}$$

where $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Department of Mathematics & Statistics
Function Theory I
FINAL TEST
21.03.2005

1. Locate the zeros of the function

$$f(z) = z^3 \sin(\pi z)$$

and determine their order.

2. Evaluate the integral

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin z}}{(z-\pi)^3} dz$$

if γ is the circle $|z-2| = 2$.

3. Find a conformal mapping of the half-strip $0 < \operatorname{Re} z < h$, $h > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, onto the upper half-plane $\operatorname{Im} w > 0$.

4. Present and prove Cauchy's inequality and Liouville's theorem.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria I
15.5.2007

1. Tutki onko f analyyttinen kun a) $f(z) = z + \bar{z}^2$, b) $f(x+iy) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$.

2. Etsi yhtälön

$$e^{z^2} = i$$

kaikki kompleksiset ratkaisut z.

3. Etsi Möbiuskuvaus f joka kuvaa ylemmän puolitason $U = \{z : \text{Im } z > 0\}$ itselleen, jolle $f(i) = i$, ja joka kuvaa positiivisen imaginääriakselin itselleen mutta ei ole identtinen kuvaus.

4. Olkoon $V = \mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$. Määrää funktio $f : V \to \mathbf{C}$ jolle $f(1) = -1$ ja joka on $\sqrt{z}$:n haara V:ssä. Osoita käyttäen käänteiskuvauksen derivaattaa koskevaa lausetta, että $2f(z)^3/3$ on f:n integraalifunktio alueessa V ja laske tämän avulla

$$\int_\gamma f dz$$

kun $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

In English:

1. Is the function f analytic when a) $f(z) = z + \bar{z}^2$, b) $f(x+iy) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$.

2. Find all complex solutions z of the equation

$$e^{z^2} = i.$$

3. Find the Möbius transformation f such that f maps the upper half plane $U = \{z : \text{Im } z > 0\}$ onto itself, and that $f(i) = i$, and which maps the positive imaginary onto itself but which is not the identity mapping.

4. Let $V = \mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$. Find the function $f : V \to \mathbf{C}$ such that $f(1) = -1$ and which a branch of $\sqrt{z}$ in V. Show using the formula for the derivative of the inverse mapping that $2f(z)^3/3$ is the integral function of f in V and determine using this the integral

$$\int_\gamma f dz$$

where $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.