Fraktaaligeometria
Loppukoe
Joulukuu 2004

1. (Teoriakysymys.) Olkoon $\sum$ luennoilla esitetty jonoavaruus

$$\sum := \{s := (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j \in \{0,1\} \text{ kaikilla } j\}$$

varustettuna luonnollisella metriikallaan

$$d(s,t) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} |s_j - t_j|,$$

ja olkoon σ (taaksepäin) siirto–operaattori

$$\sigma : (s_0 s_1 s_2 \dots) \mapsto (s_1 s_2 s_3 \dots).$$

Osoita, että dynaamisella systeemillä $(\sum, \sigma)$ on seuraava ominaisuus: jos pisteet a ja $b \in \sum$ on annettu, niin olemassa piste $s \in \sum$ ja luku $n \in \mathbf{R}$, joille pätee

$$d(a,s) \leq \frac{1}{100} \qquad \text{ja} \qquad d(b, \sigma^n(s)) \leq \frac{1}{100}.$$

2. Määritellään kuvaus $f_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_\lambda(x) = 2\lambda x - x^3$$

Onko f_λ:lla parametrin arvolla $\lambda = 1/2$ satula–solmu–, periodin kahdennus– tai joku muu bifurkaatio?

3. (Teoriakysymys.) Olkoon $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analyyttinen funktio. Osoita, että jos a on sen attraktiivinen kiintopiste, niin on olemassa $r > 0$, jolle jokainen z, $|z - a| \leq r$, toteuttaa

$$\lim_{n \to \infty} g^n(z) = a.$$

4. Tarkastele polynomin $g(z) := z + 3z^5$ dynamiikkaa kiintopisteen 0 ympäristössä. Etsi ne "suunnat" $z := re^{i\theta}$ ($r > 0$ oletetaan riittävän pieneksi) , jotka ovat "invariantteja": $g(re^{i\theta}) = se^{i\theta}$, $s > 0$. Lajittele ko. suunnat attraktiivisiin ja hylkiviin (max. 5 pistettä). Ilman tarkempia perusteluja, piirrä kuva, joka on analoginen luennoilla esitettyjen kuvien kanssa ja joka esittää g:n dynamiikkaa pisteen 0 ympäristössä (max. 1 piste).

FRAKTAALIGEOMETRIA
LOPPUKOE
LOKAKUU 2006

1. (Teoriakysymys.) Kuten luennoissa on määritelty, jono $0.s_1s_2s_3\ldots$, missä $s_j \in \{0,1,2\}$, on luvun $x \in [0,1]$ ternäärikehitelmä (eli 3–järjestelmäesitys), jos

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j}{3^j}.$$

Formuloi ja todista luennoilla esitetty tulos, joka karakterisoi ne luvut x, joilla on kaksi eri ternäärikehitelmää.

2. Funktiolla $G_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$G_\lambda(x) := \lambda \sin x,$$

on bifurkaatio parametrin arvolla $\lambda = 1$. Onko kyseessä satula–solmu–, periodin kahdennus–, vai joku muu bifurkaatio?

3. (Teoriakysymys.) Olkoon $\sum$ luennoilla esitetty jonoavaruus

$$\sum := \{s := (s_0s_1s_2\ldots) \mid s_j \in \{0,1\} \text{ kaikilla } j\}$$

varustettuna luonnollisella metriikallaan

$$d(s,t) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}|s_j - t_j|,$$

ja olkoon σ (taaksepäin) siirto–operaattori

$$\sigma : (s_0s_1s_2\ldots) \mapsto (s_1s_2s_3\ldots).$$

Osoita, että dynaamisella systeemillä $(\sum, \sigma)$ on sensitiivinen riippuvuus alkuehdoista.

4. Tarkastellaan kompleksimuuttujan polynomia $P_{d,c}(z) := z^d + c$, missä $d = 3,4,5\ldots$, ja $c \in \mathbf{C}$. Etsi kaikki $P_{d,c}$:n kriittiset pisteet (derivaatan nollakohdat). Todista seuraava karkaamiskriteerio: Jos $|z| \geq |c|$ ja $|z|^{d-1} > 2$, niin $|P^n_{d,c}(z)| \to \infty$ kun $n \to \infty$. Näytä, että jos $|c| \geq 2^{1/(d-1)}$, niin kriittisen pisteen rata karkaa äärettömään.