Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Loppukoe
19.5.2009

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-jaksollinen jatkuvasti differentioituva funktio. Todista, että f:n Fourier-kertoimille pätee $\lim_{k\to\infty} k\hat{f}(k) = 0$.

2. Esitä Fourier-inversiokaava Schwartzin luokan $\mathcal{S}$ funktioille $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja hahmottele sen todistus ilman yksityiskohtia.

3. Olkoon $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ pariton ja $K_\Omega(x) = |x|^{-n}\Omega(x/|x|)$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Miten todistetaan rotaatiomenetelmän avulla, että K_Ω:aan liittyvä singulaari-integraalioperaattori T_{K_Ω} on vahvaa tyyppiä (p,p), kun $1 < p < \infty$?

4. Olkoon $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio. Osoita, että voidaan määritellä rajoitettu lineaarioperaattori $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\widehat{T_m(f)} = m\hat{f}$ kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, jos ja vain jos $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

5. Määrittele BMO ja esitä John-Nirenbergin epäyhtälö. Todista, että jos $f \in BMO$, niin $|f|^p$ on lokaalisti integroituva kaikilla $1 \leq p < \infty$.