Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Estimointi ytimellisissä Hilbertin avaruuksissa
Loppukoe
25.5.2004

Huom. Kaikissa tehtävissä, missä kyseiset käsitteet esiintyvät, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ on rkhs ytimenään $R = R^0 + R^1$, $\mathcal{H}_0 = span\,(\phi_1, \ldots, \phi_m)$, mittausfunktionaalit ovat $L_i : \mathcal{H} \to \mathbf{R}$, $i \in [n]$ $(n \geq m)$, merkitään $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ ja mittausvirhe on $\mathbf{e} \sim N(0, \sigma^2 I)$ (σ^2 on tuntematon). Jos mittausfunktionaalit L_i ovat jatkuvia ja lineaarisia, niiden edustajat ovat $\eta_i \in \mathcal{H}$ ja näiden projektiot ovat $\xi_i = P_1\eta_i \in \mathcal{H}_1$.

1. Kerro lyhyesti omin sanoin, miksi spliniestimoinnissa käytettävän funktioavaruuden tulee olla nimen omaan ytimellinen Hilbertin avaruus ja mihin sen ydintä käytännössä tarvitaan.

2. Spliniestimointi jakaantuu karkeasti ottaen kahteen osatehtävään: (1) silotusparametrin λ estimointiin käyttäen jotain testifunktiota, (2) lopullisen spliniestimaatin $f_\lambda \in \mathcal{H}$ laskemiseen, kun silotusparametri on estimoitu. Onko osa (1) numeerisen ratkaisemisen ylivoimaisesti raskain osa, jos kyse on

(a) lineaarisesta vapaasta ongelmasta ja käytetään OCV-testifunktiota,
(b) epälineaarisesta vapaasta ongelmasta ja käytetään GCV-testifunktiota,
(c) lineaarisesta vapaasta ongelmasta ja käytetään GCV-testifunktiota,
(d) lineaarisesta konveksisti sidotusta ongelmasta ja käytetään GCV-testifunktiota?

Yhden sanan vastaukset riittävät.

3. Estimoitavasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ tiedetään, että sen kuvaajassa on hyppy kohdassa $1/2$, ts. f on (mahdollisesti) epäjatkuva kohdassa $1/2$, mutta raja-arvot $\lim_{t\uparrow 1/2} f(t) \in \mathbf{R}$ ja $\lim_{t\downarrow 1/2} f(t) \in \mathbf{R}$ ovat olemassa. Mittaukset L_i olkoot lineaarisia ja datana olkoot mittaustulokset $\mathbf{y} = \mathbf{L}f + \mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$. Hahmottele käypä malli estimoitavalle funktiolle: funktioiden rkhs ja mahdollinen lisäosa. Voiko ratkaisemisessa käyttää vapaan lineaarisen ongelman perustekniikkaa? Jos, niin mikä olisi matriisi T?

4. Olkoot mittaukset L_i lineaarisia (ja jatkuvia). Oletetaan, että matriisi $\Sigma \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\Sigma(i,j) = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$, on säännöllinen ja matriisi $T \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $T(i,j) = L_i\phi_j = \langle \eta_i, \phi_j \rangle$, on täyttä sarakeastetta m. Tarkastellaan silottavaa interpolointiongelmaa, missä minimoidaan $\mathcal{H}$:n normi $\|P_1 f\|$ joukossa $\{f \in \mathcal{H} \,|\, \mathbf{L}f = \mathbf{y}\}$, missä data $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ on annettu. Johda ongelman ratkaisu $f_0 = \sum_{j=1}^m d_j\phi_j + \sum_{i=1}^n c_i\xi_i$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= (d_1, \ldots, d_m) = (T^t\Sigma^{-1}T)^{-1}T^t\Sigma^{-1}\mathbf{y} \quad ja \\ \mathbf{c} &= (c_1, \ldots, c_n) = \Sigma^{-1}\big(I - T(T^t\Sigma^{-1}T)^{-1}T^t\Sigma^{-1}\big)\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Estimointi ytimellisissä Hilbertin avaruuksissa
Loppukoe
19.5.2005

Huom. Tenttijä saa käyttää konekirjoitettuja luentoja.

Neljä parasta ratkaisua arvostellaan.

1. Spliniestimointi jakaantuu karkeasti ottaen kahteen osatehtävään: (1) silotusparametrin λ estimointiin käyttäen jotain testifunktiota, (2) lopullisen spliniestimaatin $f_\lambda \in \mathcal{H}$ laskemiseen, kun silotusparametri on valittu. Onko osa (1) numeerisen ratkaisemisen selvästi raskain osa, jos kyse on

(a) lineaarisesta vapaasta ongelmasta ja käytetään OCV-testifunktiota,

(b) epälineaarisesta vapaasta ongelmasta ja käytetään GCV-testifunktiota,

(c) lineaarisesta konveksisti sidotusta ongelmasta ja käytetään GCV-testifunktiota,

(d) lineaarisesta vapaasta ongelmasta ja käytetään GCV-testifunktiota?

Yhden sanan vastaukset riittävät.

2. Voidaanko spliniestimointia, tarkemmin sanottuna estimointia ytimellisissä Hilbertin avaruuksissa, soveltaa menestyksellisesti

(a) joidenkin differentiaali- ja integraaliyhtälöiden numeeriseen ratkaisemiseen,

(b) satunnaismuuttujan jakauman (tiheysfunktion) estimointiin, kun käytettävissä on otos jakaumasta?

Lyhyet vastaukset, mielellään vähän enemmän perusteluja kuin tehtävässä 1.

3. Tarkastellaan yksikköpallolla $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ määriteltyjen funktioiden (standardia) rkhs-avaruutta $\mathcal{H}$. Olkoon $w : S^2 \to \mathbf{R}$ annettu funktio (joka on neliöllisesti integroituva). Selosta lyhyesti kuinka estimoisit integraalia

$$I(f) = \int_{S^2} w(t) f(t)\, dt,$$

kun funktiosta $f \in \mathcal{H}$ on käytettävissä kurssissa tavanomaiset, lineaaristen mittausfunktionaalien antamat mittaustulokset. Mihin kurssin lauseeseen menettelysi perustuu?

4. Oletetaan tiedettävän, että funktio $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ toteuttaa ehdon $f(t) \geq t/4$ kaikilla $t \in [0,1]$. Mittausfunktionaalit ovat $L_i f = f(t_i)$, missä $t_i = i/10 \in [0,1]$, $i \in [10]$, ja mittaustulokset ovat tavanomaisesti $\mathbf{y} = \mathbf{L}f + \mathbf{e}$, missä $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_{10})$ ja

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0.125	0.55	1.275	0.6	0.225	0.05	0.475	1.2	1.125	1.45

Selosta lyhyesti kuinka estimoisit funktiota f:

(a) Mitä funktioavaruutta käyttäisit? Ehdota mahdolliset parametritkin.

(b) Mitä sidosehtoja asettaisit, kun ongelma halutaan pitää lineaarisena? Tässä asiassa joudut approksimoimaan.

(c) Onko estimointiin muita vaihtoehtoja?

5. Olkoon $\mathcal{H} = span\,(\psi_1, \ldots, \psi_p)$ funktioista $f : \mathcal{T} \to \mathbf{R}$ koostuva äärellisulotteinen sisätuloavaruus sisätulonaan $\langle *, * \rangle$. Muodosta $\mathcal{H}$:n ydin $R(s,t)$ kannan $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$ avulla, kun

(a) kanta on ortonormaali, (b) se on vain kanta.