

Distribuuutioteoria
Loppukoe, 20.01.2004

1. (a) Määrittele testifunktioavaruus $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.
(b) Kuuluuko funktio $f(x) = e^{-|x|^2}$ avaruuteen $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$? Entä $g(x) = e^{ix \cdot \xi}$, missä $\xi \in \mathbf{R}^n$?
2. Olkoon $f(x) = \sin|x| \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Määritä distribuutioderivaatat f' ja f'' .
3. Olkoon $I \subseteq \mathbf{R}$ avoin väli ja $u \in \mathcal{D}'(I)$ sellainen, että $u' = 0$ distribuutiomeilessä. Osoita, että u on vakio. Mitä tapahtuu, jos I on kahden avoimen välin yhdiste?
4. Olkoot $f(x) = e^{-a|x|^2}$ ja $g(x) = e^{i\eta \cdot x}$ funktioita \mathbf{R}^n :ssä, missä $a \in \mathbf{R}_+$ ja $\eta \in \mathbf{R}^n$. Määritä f :n ja g :n konvoluutio $f * g$.
5. Osoita, että

$$\bigcap_{s \in \mathbf{R}} H^s(\mathbf{R}^n) \subseteq C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Päteekö seuraava:

$$\bigcap_{s \in \mathbf{R}} H^s(\mathbf{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)?$$