

## Differentialekvationer II

Tentamen 9.12.2008

Det är tillåtet att använda kalkylator samt MAOL:s tabeller.

1. Visa, att  $\left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$  är ett fundamentalsystem till differentialekvationen

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{1+t} \begin{pmatrix} 1+2t & -2t \\ t & 1-t \end{pmatrix} x(t).$$

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y - 2z, \\ \dot{y} &= 2x + 5y + 3z, \\ \dot{z} &= -2x - 4y - 2z. \end{aligned}$$

3. Visa, att origo är ett jämviktsläge till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -5x + 4y + x^2y, \\ \dot{y} &= -2x + y + xy^2. \end{aligned}$$

Är origo stabil?

4. Bestäm systemets

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= 1 - y^2 \end{aligned}$$

jämviktslägen och undersök dessas stabilitet. Rita ett fasdiagram.

## Differentialekvationer II

Tentamen 22.1.2009

Det är tillåtet att använda kalkylator samt MAOL:s tabeller.

1. Låt  $A(t)$  vara en  $2 \times 2$ -matris. Är det möjligt att både  $x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  och  $x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  satisfierar ekvationen  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ?

2. Bestäm ett fundamentalsystem till ekvationen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

3. Bestäm systemets

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - 2xy, \\ \dot{y} &= xy - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

jämviktslägen och undersök dessas stabilitet. Rita ett fasdiagram i  $\mathbf{R}_+^2$ .

4. Bestäm den skalära ekvationens

$$\dot{x} = x(\theta - (x-1)^2)$$

jämviktslägen och undersök dessas stabilitet för olika värden på parametern  $\theta \in \mathbf{R}$ . Rita ett bifurkationsdiagram.

5. Visa, att  $x(t) = e^t$  satisfierar differentialekvationen

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

om och endast om  $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$ . Använd detta till att lösa ekvationen

$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$