Differentialekvationer I

Examen, 14.10. 2008

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2 + 1, \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = e^t.$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till Bernoullis ekvation

$$y'(x) + 2xy(x) + xy(x)^4 = 0.$$

4. Betrakta SIR-modellen

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

i området $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Här är $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) Visa, att $N := S + I + R$ är konstant.

(b) Visa, att om $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, så existerar gränsvärdet $s_\infty := \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{N}$ och tillfredsställer ekvationen

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty.$$