Differentialekvationer I

Tentamen 17.10.2006

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2, \\ x(1) &= 0. \end{aligned}$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \sin t.$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \cos 2t.$$

4. En population växer enligt den logistiska modellen

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

   Man vet att $N(0) = K/10$ och $N(1) = K/5$. För vilket värde på t är $N(t) = K/2$?

Differentialekvationer I

Slutförhör, 16.11. 2006

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2 \cos t, \\ x(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = e^t.$$

3. Visa, att differentialekvationen

$$2x\cos^2 y + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

är exakt och bestäm den allmänna lösningen. Det räcker att ange lösningen i implicit form.

4. Bestäm den allmänna lösningen till Bernoullis ekvation

$$y'(x) + 2xy(x) + xy(x)^4 = 0.$$

5. Betrakta SIR-modellen

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

i området $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Här är $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) Visa, att $N := S + I + R$ är konstant.

(b) Visa, att om $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, så existerar gränsvärdet $s_\infty := \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{N}$ och tillfredsställer ekvationen

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty.$$