Differentiaaliyhtälöt II

Koe 9.8.2007

1. (a) Kerro, mikä on lokaalin OY-lauseen väittämä.

   (b) Onko alkuarvo–ongelmalla

   $$y' = y^{1/3}, y(0) = 0,$$

   yksikäsitteinen ratkaisu? Selitä!

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

   $$y'' - 2y = \sin(x) + 1, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

3. Määrää yhtälön

   $$y'' - 4y' + 4y = \sin^2(x)$$

   yleinen ratkaisu.

4. Määrää yhtälön

   $$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad x \neq 0,$$

   ratkaisujen perusjärjestelmä. **Vihje**: Huomaa, että $y_1(x) = x^2$ on yksi ratkaisu.

5. Määrää systeemin $y' = Ay$ yleinen ratkaisu, kun

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Kurssikoe 11.12.2007

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukko on sallittu

1. (a) Onko seuraavilla alkuarvo–ongelmilla

$$y' = e^{y^2}\cos(1 + x^4y^2), \;\; y(0) = 0,$$

ja

$$y' = y^{1/4}, \;\; y(0) = 0,$$

yksikäsitteiset ratkaisut jossain pisteen $x = 0$ ympäristössä? Perustele vastauksesi.

(b) Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$y' = 4y, \;\; y(0) = 1.$$

Laske tälle kolme ensimmäistä Picard–iteraation termiä.

2. (Laskareista) Määrää seuraavan autonomisen systeemin ratakäyrät, kriittiset pisteet ja kuvaile ratkaisujen aikakehitys.

$$\begin{cases} x' = -8y \\ y' = 18x \end{cases}$$

3. Määrää 3×3–systeemin $x' = Ax$ ratkaisujen perusjärjestelmä, kun matriisi A on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} x, \;\; x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Ylimääräinen kurssikoe 19.12.2007

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukko on sallittu

1. (a) Onko seuraavilla alkuarvo–ongelmilla

$$y' = |y|\cos(1+x), \;\; y(0) = 0,$$

ja

$$y' = y^{1/2}, \;\; y(0) = 0,$$

yksikäsitteiset ratkaisut jossain pisteen $x = 0$ ympäristössä? Perustele vastauksesi.

(b) Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$y' = 4xy, \;\; y(0) = 1.$$

Laske tälle kolme ensimmäistä Picard–iteraation termiä.

2. (Laskareista) Määrää seuraavan autonomisen systeemin ratakäyrät, kriittiset pisteet ja kuvaile ratkaisujen aikakehitys.

$$\begin{cases} x' = 3/y \\ y' = 2/x. \end{cases}$$

3. Määrää 3×3–systeemin $x' = Ax$ ratkaisujen perusjärjestelmä, kun matriisi A on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \;\; x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Koe 24.01.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallittu.

1. (a) Kerro, mikä on lokaalin OY-lauseen väittämä.

   (b) Onko alkuarvo–ongelmalla

   $$y' = \sin(x)|y|y^{1/2}, y(0) = 0,$$

   yksikäsitteinen ratkaisu? Perustelu!

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

   $$y'' + 4y = \sin(x) + 2\cos(x),\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

3. Määrää autonomisen systeemin

   $$x'(t) = xy,\ \ y'(t) = y^2 - 1,$$

   kriittiset pisteet ja ratakäyrät, ja luonnostele sen aikakehitys.

4. Määrää systeemin

   $$y' = Ay$$

   yleinen ratkaisu, kun

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Määrää alkuarvo–ongelman

   $$y' = Ay,\ \ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ratkaisu, kun

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Koe 3.4.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallittu.

1. (a) Kerro, mikä on lokaalin OY-lauseen väittämä.

   (b) Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

   $$y' = 2xy, \; y(0) = 1.$$

   Laske tälle kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä.

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

   $$y'' + y' + y = \sin(x) + \cos(x), \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

3. Muunna yhtälö $y'' + y = 0$ sijoituksella $y' = v$ ensimmäisen kertaluvun autonomiseksi systeemiksi, ja määritä tämän systeemin kriittiset pisteet ja luonnostele ratakäyrät ja niiden aikakehitys yv–tasossa.

4. Olkoon y alkuarvo–ongelman

   $$y' = \frac{y^3 - y}{1 + x^2y^2}, \; y(0) = 2,$$

   ratkaisu. Osoita, että määrittelyjoukossaan $y(x) > 1$.

5. Määrää alkuarvo–ongelman

   $$y' = Ay, \; y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   ratkaisu, kun

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Koe 12.06.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallittu.

1. (a) Kerro, mikä on lokaalin OY-lauseen väittämä.

   (b) Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0.$$

   Laske tälle kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä.

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

3. Määritä systeemin

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = e^{x+y} \end{cases}$$

   kriittiset pisteet ja luonnostele ratakäyrät ja niiden aikakehitys xy–tasossa.

4. Olkoon y alkuarvo–ongelman

$$y' = \frac{y^3 - y}{1 + x^4 y^2 0},\ y(0) = 1/2,$$

   ratkaisu. Osoita, että määrittelyjoukossaan $0 < y(x) < 1$.

5. Määrää alkuarvo–ongelman

$$y' = Ay,\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   ratkaisu, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Koe 14.08.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallittu.

1. (a) Kerro, mikä on lokaalin OY-lauseen väittämä.

   (b) Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

   $$y' = -2xy^2, \ y(0) = 1.$$

   Laske tälle kolme ensimmäistä Picardin iteraation termiä.

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y'' + 2y' + y = \sin(x), \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

3. Määritä systeemin

$$\begin{cases} x' = -y(y-1) \\ y' = (x-1)(y-1) \end{cases}$$

kriittiset pisteet sekä luonnostele ratakäyrät ja niiden aikakehitys xy–tasossa.

4. Olkoon y alkuarvo–ongelman

$$y' = \frac{y^4 - y^2}{1 + x^4 y^{200} + e^{x^2}}, \ y(0) = 2,$$

ratkaisu. Osoita, että määrittelyjoukossaan $y(x) > 1$.

5. Määrää alkuarvo–ongelman

$$y' = Ay, \ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ratkaisu, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Kurssikoe 9.12.2008

SAA KÄYTTÄÄ laskinta ja MAOL:n taulokoita.

1. Osoita, että $\left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$ on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{1+t} \begin{pmatrix} 1+2t & -2t \\ t & 1-t \end{pmatrix} x(t)$$

perusjärjestelmä.

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y - 2z, \\ \dot{y} &= 2x + 5y + 3z, \\ \dot{z} &= -2x - 4y - 2z \end{aligned}$$

kaikki ratkaisut.

3. Osoita, että origo on differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -5x + 4y + x^2 y, \\ \dot{y} &= -2x + y + xy^2 \end{aligned}$$

tasapainokohta. Onko origo stabiili?

4. Määritä systeemin

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= 1 - y^2 \end{aligned}$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta. Piirrä faasikuvio.

Differentiaaliyhtälöt II

Loppukoe 22.1.2009

SAA KÄYTTÄÄ laskinta ja MAOL:n taulokoita.

1. Olkoon $A(t)$ 2×2-matriisi. Onko mahdollista, että sekä $x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ että $x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

2. Etsi yhtälön
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t)$$
jokin perusjärjestelmä.

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - 2xy, \\ \dot{y} &= xy - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$
tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta. Piirrä faasikuvio $\mathbf{R}^2_+$:ssa.

4. Määritä skalaariyhtälön
$$\dot{x} = x\left(\theta - (x-1)^2\right)$$
tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta parametrin $\theta \in \mathbf{R}$ eri arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.

5. Osoita, että $x(t) = e^t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön
$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$
jos ja vain jos $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Ratkaise tämän nojalla
$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II
Erilliskoe 2.4.2009

1. Onko olemassa jatkuvaa matriisifunktiota $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ niin, että funktiot $x^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $x^2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ toteuttavat saman yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ koko reaaliakselilla?

2. Määritä yhtälön $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ratkaisujen perusjärjestelmä, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Määritä systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiiliutta. Piirrä faasiokuvio.

5. Määritä skalaariyhtälön

$$\dot{x} = x\big(\theta - (x-1)^2\big)$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiiliutta parametrin $\theta \in \mathbb{R}$ eri arvoilla. Piirrä bifurkaatiokaavio.

Differentiaaliyhtälöt II

Loppukoe 11.6.2009

SAA KÄYTTÄÄ laskinta ja MAOL:n taulokoita.

1. Olkoon $A(t)$ 2×2-matriisi. Onko mahdollista, että sekä $x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ että $x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

2. Etsi yhtälön
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x(t)$$
jokin perusjärjestelmä.

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - 2xy, \\ \dot{y} &= xy - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$
tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta. Piirrä faasikuvio $\mathbf{R}^2_+$:ssa.

4. Määritä skalaariyhtälön
$$\dot{x} = x\left(\theta - (x-1)^2\right)$$
tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta parametrin $\theta \in \mathbf{R}$ eri arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.

5. Osoita, että $x(t) = e^t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön
$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$
jos ja vain jos $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Ratkaise tämän nojalla
$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$