Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt
2. välikoe
17.5.2004

1. Ratkaise AAT $2y'' = 3y^2,\ y(1) = y'(1) = 1.$

2. Ratkaise DY $y'' + y' - 2y = 4e^{-2x}.$

3. Ratkaise DY $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = x.$

4. Ratkaise YR $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 8y_2. \end{cases}$

Differentiaaliyhtälöt

Välikoe, 8.11.2004

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$y' = 2\sqrt{y+1}\cos x, \quad y(\pi) = 0.$$

2. Määrää yhtälön
$$x^2 + y^2 + 3xyy' = 0$$
yleinen ratkaisu (myös implisiittinen ratkaisu kelpaa). Vihje: käytä integroivana tekijänä sopivaa x:n potenssia.

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2}, \quad y(2) = 0.$$

4. (a) Mitä tarkoitetaan homogeeniyhtälön
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$
ratkaisujen perusjärjestelmällä? Kuinka voit tarkistaa, muodostavatko annetut funktiot perusjärjestelmän?

   (b) (Laskareista) Määrää yhtälön
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x, \; x > 0$$
yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt

2. välikoe, 21.12.2004

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Määrää kolme ensimmäistä Picardin iteraatiofunktiota alkuarvo–ongelmalle

$$y' = 3x^2y, \quad y(0) = 1,$$

ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

2. Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} x'(t) = (x-4)(1-y) \\ y'(t) = (x+1)(x-4) \end{cases}$$

kriittiset pisteet, ratkaisukäyrät ja aikakehitys.

3. (a) Osoita, että muotoa $x(t) = e^{rt}u$, $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, oleva vektorifunktio on vakiokertoimisen $n \times n$–systeemin

$$x'(t) = Ax(t)$$

ratkaisu jos ja vain jos r on matriisin A ominaisarvo ja u sitä vastaava ominaisvektori.

(b) Mitä tarkoitetaan homogeenisen $n \times n$–systeemin perusjärjestelmällä? Kuinka voit varmistua siitä että annettu perhe muodostaa perusjärjestelmän ?

4. Määrää systeemin

$$x'(t) = Ax(t)$$

perusjärjestelmä, kun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (Ylimääräinen loppukoetehtävä; laskareista) Osoita, ettei yhtälö

$$y^2 + 2xy - x^2y' = 0$$

ole eksakti. Käyttäen sopivaa integroivaa tekijää saata se eksaktiin muotoon (vihje: kokeile sopivaa x:n tai y:n potenssia) ja määrää tämän yhtälön kaikki ratkaisut. Saatko näin määrättyä myös kaikki alkuperäisen yhtälön ratkaisut?

Differentiaaliyhtälöt

2. välikoe (ylimääräinen), 20.1.2005

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Määrää kolme ensimmäistä Picardin iteraatiofunktiota alkuarvo–ongelmalle

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 5,$$

ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

2. (Luennoista) Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} x'(t) = -y(y-2) \\ y'(t) = (x-2)(y-2) \end{cases}$$

kriittiset pisteet, ratkaisukäyrät ja aikakehitys.

3. Määrää systeemin

$$x'(t) = Ax(t)$$

perusjärjestelmä, kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Määrää systeemin

$$x'(t) = Ax(t)$$

perusjärjestelmä, kun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Kurssikoe 13.12.2005

Ei laskimia eikä kännyköita, taulukkokirjat sallitaan

1. Määrää yhtälön $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ yleinen ratkaisu.

2. (Laskareista) Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} x'(t) = (x-4)(1-y) \\ y'(t) = (x+1)(x-4) \end{cases}$$

kriittiset pisteet, ratakäyrät ja luonnostele sen aikakehitys.

3. Määrää systeemin $x'(t) = Ax(t)$ yleinen ratkaisu, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Määrää ratkaisu alkuarvo–ongelmalle

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \; x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaaliyhtälöt II
Loppukoe, 26. 1. 2006

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. *a*) Muotoile ilman todistusta lokaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyys lause (eli OY-lause) 1. kertaluvun alkuarvotehtäville.

   b) Laske alkuarvotehtävän

$$y' = 2 + 3y, \quad y(0) = 2.$$

   Picardin peräkkäisten approksimatioiden menetelmän kolme ensimmäistä iteraatiotermiä y_1, y_2 ja y_3.

2. Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} x'(t) = (x - 3y)(y + 1) \\ y'(t) = (3y - x)(x - 2) \end{cases}$$

   kriittiset pisteet, ratkaisukäyrät ja aikakehitys.

3. *a*) Selitä, mitä tarkoitetaan homogeenisen $n \times n$-systeemin perusjärjestelmällä.

   b) Selitä, mitä tarkoitetaan homogeenisten $n \times n$-systeemien yhteydessä Wronskin determinantilla ja miten Wronskin determinantti liittyy perusjärjestelmiin.

4. Määrää systeemin

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t)$$

   perusjärjestelmä.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaaliyhtälöt II
Lopputentti, 3. 4. 2006

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. a) Näytä, että funktiot $y_1(x) \equiv 0$ ja

$$y_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & x > 0 \end{cases}$$

ovat molemmat alkuarvotehtävän $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ ratkaisuja $\mathbb{R}$:ssä.

b) Selitä, miksi alkuarvotehtävällä ei tässä tapauksessa ole yksikäsitteistä ratkaisua.

2. Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} y'(t) = (x+1)(y+1)x \\ x'(t) = x(1-y^2) \end{cases}$$

kriittiset pisteet, ratkaisukäyrät ja aikakehitys.

3. Olkoon

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 2t^{1/2} \\ t^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 2t^{1/2}\ln t \\ t^{-1/2}(\ln t + 2) \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4}t^{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Muodostavat vektorifunktiot $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ yhtälösysteemin $x'(t) = A(t)x(t)$ perusjärjestelmän välillä $(0, \infty)$?

4. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Määrää homogeenisen yhtälösysteemin

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x(t)$$

yleinen ratkaisu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaaliyhtälöt II
Loppukoe, 9. 8. 2006

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} y'(t) = (x+1)(y-x)x \\ x'(t) = (x-y)(x+1) \end{cases}$$

kriittiset pisteet, ratkaisukäyrät ja aikakehitys.

3. Olkoon

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 2t\ln t + t \\ t^2 \ln t \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 3t^{-1} & -4t^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muodostavatko vektorifunktiot $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ yhtälösysteemin $x'(t) = A(t)x(t)$ perusjärjestelmän välillä $(0, \infty)$?

4. a) Laske alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} y' = 4x^3 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Picardin peräkkäiset approksimaatiot y_0, y_1, y_2 ja y_3.

b) Ratkaise a)-kohdan alkuarvotehtävä.

5. Määrää homogeenisen yhtälösysteemin

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x(t)$$

yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt II

Kursssikoe 12.12.2006

1. Osoita, että $\left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \right\}$ on differentiaaliyhtälön

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{1+t} \begin{pmatrix} 1+2t & -2t \\ t & 1-t \end{pmatrix} x(t)$$

perusjärjestelmä.

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 2z, \\ \dot{y} &= -x + 2y + z, \\ \dot{z} &= x - z \end{aligned}$$

kaikki ratkaisut.

3. Osoita, että origo on differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -5x + 4y + x^2 y, \\ \dot{y} &= -2x + y + xy^2 \end{aligned}$$

tasapainokohta. Onko origo stabiili?

4. Määritä skalaariyhtälön

$$\dot{x} = x\left(\theta - (x-1)^2\right)$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta parametrin $\theta \in \mathbf{R}$ eri arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.

Differentiaaliyhtälöt II

Loppukoe 25.1.2007

1. Olkoon $A(t)$ 2×2-matriisi. Onko mahdollista, että sekä $x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ että $x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ toteuttavat yhtälön $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$?

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - z, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= y \end{aligned}$$

kaikki ratkaisut.

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - 2xy, \\ \dot{y} &= xy - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta.

4. Määritä skalaariyhtälön

$$\dot{x} = x\left(\theta - (x-1)^2\right)$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta parametrin $\theta \in \mathbf{R}$ eri arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.

5. Osoita, että $x(t) = e^t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

jos ja vain jos $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$. Ratkaise tämän nojalla

$$(t-1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Differentiaaliyhtälöt II

Koe 12. 4.2007

1. Olkoon
$$A(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + 2\sin t & 2(\cos t - \sin t) \\ -\cos t + \sin t & 2\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$
Osoita, että
$$\begin{pmatrix} e^{\sin t} & 2e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & e^{\cos t} \end{pmatrix}$$
on syteemin $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ perusmatriisi.

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän
$$\begin{aligned} \dot{x} &= z, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= x \end{aligned}$$
kaikki ratkaisut.

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - 2xy, \\ \dot{y} &= xy - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$
tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta.

4. Määritä skalaariyhtälön
$$\dot{x} = x\left(\theta - (x-1)^2\right)$$
tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta parametrin $\theta \in \mathbf{R}$ eri arvoilla. Piirrä bifurkaatiokuvio.

5. Osoita, että alkuarvotehtävällä
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{x}, \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$
on äärettömän monta ratkaisua. Miksi tämä ei ole ristiriidassa luennolla todistetun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen kanssa?

Differentiaaliyhtälöt II

Koe 14.06.2007

1. (a) Kerro, mikä on lokaalin OY-lauseen väittämä.
   (b) Onko alkuarvo–ongelmalla
   $$y' = y^{1/2}, y(0) = 0,$$
   yksikäsitteinen ratkaisu? Selitä!

2. Määrää autonomisen systeemin
$$x'(t) = (y-2)(x-2),\ y'(t) = -x(x-2),$$
kriittiset pisteet ja ratakäyrät, ja luonnostele sen aikakehitys.

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$y'' - y = x + 3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

4. Määrää systeemin
$$y' = Ay$$
yleinen ratkaisu, kun
$$A = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 11 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$
Vihje: Matriisin A kaikki ominaisarvot ovat kokonaislukuja !

5. Määrää alkuarvo–ongelman
$$y' = Ay,\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ratkaisu, kun
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$