Differentiaaliyhtälöt I

Koe 9.8.2007

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = (y^2 + 1)/y, \quad y(1) = 2.$$

   Implisiittinen ratkaisu riittää.

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = y\sin(x) + 3x^2 e^{-\cos x}, \quad y(0) = 1.$$

3. Osoita, että yhtälö

$$(1 - y\sin(x)) + \cos(x)y' = 0$$

   on eksakti ja määrää sen yleinen ratkaisu.

4. Määrää yhtälön

$$x^2 + y^2 + xyy' = 0$$

   yleinen ratkaisu. Implisiittinen ratkaisu riittää.

5. (a) Selitä, mikä on Eulerin menetelmä ensimmäisen kertaluvun yhtälölle.
   (b) Käyttäen Eulerin mentelmää määrää alkuarvo–ongelman

$$y' = y^2, y(1) = -1,$$

   ratkaisun likiarvo pisteessä 2, kun askelvälinä on $h = 1/3$. Vertaa oikeaan ratkaisuun

[redacted]

Differentiaaliyhtälöt I

Laitostentti 19.12.2007

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukkokirja on sallittu

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = y^2 \sin x, \ \ y(0) = 1.$$

   Mikä on ratkaisun määrittelyjoukko?

2. Määritä yhtälön

$$6x \sin(y) + x^2 \cos(y) y' = 0$$

   yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää) käyttämällä sopivaa, vain x:sta riippuvaa integroivaa tekijää.

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma $y'' - 4y' + 4y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$

4. (Laskareista) Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$xy' + 2y = \sin(x), \ \ y(\pi/2) = 0.$$

5. Määrää yhtälön $y'' + y = x^2$ yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Laitostentti 04.03.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukkokirja on sallittu

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = y^2 \tan x, \; y(0) = -1.$$

Mikä on ratkaisun määrittelyjoukko?

2. Määritä yhtälön

$$\sin y - e^{-x} \sin x + y' \cos y = 0$$

yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää) käyttämällä sopivaa, vain x:sta riippuvaa integroivaa tekijää.

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma $4y'' - 4y' + y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$

4. Ratkaise yhtälö $y' + 2y = xy^{-2}$.

5. Määrää yhtälön $y'' - 4y = 2\sin(2x)$ yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe 13.5.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukko on sallittu

1. Ratkaise alkuarvo-ongelma $y' = (y^2+1)/y^2$, $y(1) = 1$ implisiittisessä muodossa.

2. Osoita, että yhtälöllä

$$2y + (x+y)\,y' = 0$$

on muotoa $\mu(y)$ oleva integroiva tekijä (siis vain y:n arvoista riippuva). Määrää se ja ratkaise vastaava eksakti yhtälö. Löydätkö näin alkuperäisen yhtälön kaikki ratkaisut?

3. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$xy' + 2y = \cos^2(x) - \sin^2(x), \;\; y(\pi/2) = 0.$$

4. Määritä yhtälön $y' - y = e^{2x}y^3$ yleinen ratkaisu.

5. Määrää alkuarvo-ongelman $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$, ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe 12.06.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukko on sallittu

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma $y' + 1 = 2y$, $y(1) = 1$.

2. Osoita, että yhtälöllä
$$(x^4 + y)\, y' + xy^2 + x \ln x = 0$$
on muotoa $\mu(x)$ oleva integroiva tekijä (siis vain x:n arvoista riippuva). Määrää se ja ratkaise vastaava eksakti yhtälö. Löydätkö näin alkuperäisen yhtälön kaikki ratkaisut?

3. Määritä yhtälön $(x^2 + 1)\, y' + 3xy = 6x$ yleinen ratkaisu.

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = -4.$$

5. Määritä alkuarvo–ongelman $y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$, ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe 14.08.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukko on sallittu

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma $(x^2+1)y' + yx = 0$, $y(1) = 2$.

2. Määrää yhtälön

$$x\cos(x+y) + x^2\sin(x-y))\,y' + 2\sin(x+y) + 3x\cos(x-y) = 0$$

   yleinen ratkaisu.

   Vihje: Osoita, että yhtälöllä on muotoa x^r oleva integroiva tekijä.

3. Määritä yhtälön $y' + 2xy = x$ yleinen ratkaisu.

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$2xyy' = 4x^2 + 3y^2, \quad y(1) = -4.$$

5. Määritä alkuarvo–ongelman $y'' - y' + y/4 = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$, ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Kurssikoe, 14.10. 2008

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2 + 1, \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = e^t$$

yleinen ratkaisu.

3. Määritä Bernoullin yhtälön

$$y'(x) + 2xy(x) + xy(x)^4 = 0$$

yleinen ratkaisu.

4. Tarkastellaan SIR-mallia

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

joukossa $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Tässä $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) Osoita, että $N := S + I + R$ on vakio.

(b) Osoita, että jos $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, niin raja-arvo $s_\infty := \lim_{t \to \infty} \frac{S(t)}{N}$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty.$$

Differentiaaliyhtälöt I

Laitostentti 12.11.2008

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukkokirja on sallittu

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = y \tan x, \ \ y(\pi) = 1.$$

   Mikä on ratkaisun määrittelyjoukko?

2. Määritä yhtälön

$$6\sin(y) + x\cos(y)y' = 0$$

   yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää) käyttämällä sopivaa, vain x:sta riippuvaa integroivaa tekijää.

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma $4y'' - 4y' + y = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

4. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$xy' + 2y = \sin(x), \ \ y(\pi/2) = 0.$$

5. Määrää yhtälön $y'' + 4y = x^4$ yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe, 3.3. 2009

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -te^{x(t)}, \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön

$$\ddot{x}(t) - x(t) = \sin t$$

   yleinen ratkaisu.

3. Osoita differentiaaliyhtälö

$$2xy + 3 + \left(x^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

   eksaktiksi ja määritä sen yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää).

4. Määritä yhtälön

$$y'(x) = (x - y)^2 + 1$$

   yleinen ratkaisu. Sisältyvätkö kaikki ratkaisut yleiseen ratkaisuun?

5. Tarkastellaan SIR-mallia

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

   joukossa $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Tässä $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Oletetaan lisäksi että $I(0) > 0$.

   (a) Osoita, että $N := S + I + R$ on vakio.

   (b) Osoita, että jos $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, niin raja-arvo $s_\infty := \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{N}$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty.$$

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe, 11.6. 2009

SAA KÄYTTÄÄ laskinta ja MAOL:n taulokoita.

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2, \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = F \cos \Omega t$$

yleinen ratkaisu. Tässä ω, Ω ja F ovat reaalisia vakioita.

3. Osoita, että jos

$$\frac{1}{M(x,y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x,y) \right)$$

on pelkästään y:n funktio, niin yhtälöllä

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

on muotoa $\mu(y)$ oleva integroiva tekijä.

4. Yhtälön

$$y' + P(x)y = (x+1)^2 e^x$$

eräs ratkaisu on

$$y = \left(x^2 - 1\right) e^x.$$

Määritä yleinen ratkaisu.

5. Tarkastellaan SIR-mallia

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S I, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S I - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned}$$

joukossa $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Tässä $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) Osoita, että $N := S + I + R$ on vakio.

(b) Osoita, että jos $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, niin raja-arvo $s_\infty := \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{N}$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty.$$