Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt
1. välikoe
18.3.2004

1. Ratkaise $y' + x^2y = x^2$.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$3x^2y^2 + 4x + (2x^3y + 1)y' = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Etsi käyräparven $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$ $(C > 0)$ kohtisuorat leikkaajat.

4. Olkoon $f(x,y) = \frac{\cos x}{1+x^2}(y^2 + 3y - 4)$.

a) Mitkä vakiofunktiot ovat differentiaaliyhtälön $y' = f(x,y)$ ratkaisuja?

b) Osoita, että alkuarvotehtävän

$$y' = f(x,y), \; y(1) = -3$$

ratkaisufunktio y on rajoitettu määrittelyvälillään Δ.

c) Mikä on b)–kohdassa maksimaalinen määrittelyväli Δ? Perustelu?

Differentiaaliyhtälöt I (3ov)

Loppukoe, 16.12.2004

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Määrää yhtälön
$$y' + xy = 0$$
yleinen ratkaisu, sekä se joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.

2. Määrää yhtälön
$$(x^2 + y^2) + 3xyy' = 0$$
yleinen ratkaisu. Implisiittinen muotokin käy. Vihje: integroiva tekijä

3. Määrää alkuarvo–ongelman
$$y' - 4y = 2xy^2, \; y(0) = -4$$
ratkaisu.

4. Selitä, miten Eulerin menetelmä toimii kun heaetaan approksimatiivista ratkaisua alkuarvo–ongelmalle
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

5. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$4y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -11/2.$$

ma 14.2. /10-12 kok.huone

Differentiaaliyhtälöt I (3ov)

Loppukoe, 14.2.2005 (Päivi Koskinen)

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Määrää yhtälön
$$y' + x^2 y = 0$$
yleinen ratkaisu, sekä se joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = -1$.

2. Määrää yhtälön
$$(x^3 + y^2) + xyy' = 0$$
yleinen ratkaisu. Implisiittinen muotokin käy. Vihje: Kokeile sopivaa integroivaa tekijää.

3. Määrää alkuarvo–ongelman
$$y' - y = 2xy, \; y(0) = -1$$
ratkaisu.

4. Selitä, miten Eulerin menetelmä toimii kun heaetaan approksimatiivista ratkaisua alkuarvo–ongelmalle
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

5. Ratkaise alkuarvo–ongelma
$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

Differentiaaliyhtälöt I

Kurssikoe, 18.10.2005

Ei laskimia eikä kännyköita, taulukkokirjat sallitaan

1. Määrää alkuarvo–ongelman

$$y' = y \sin x, \quad y(0) = -1$$

ratkaisu.

2. (Laskareista) Osoita ettei yhtälö

$$y^2 + 2xy - x^2 y' = 0$$

ole eksakti. Käyttäen sopivaa x:n tai y:n potenssia integroivana tekijänä muunna tämä yhtälö eksaktiksi, ja määrää implisiittinen ratkaisu eksaktille versiolle.

Muistin tueksi: Eksaktille yhtälölle $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ saadaan integraalifunktio $F(x,y)$ kaavasta

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)\,dt + \int N(x_0,y)\,dy.$$

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' + 4y - e^{-x} = 0, \quad y(0) = 4/3.$$

4. (a) Muodostavatko funktiot $y_1(x) = e^x \cos x$ ja $y_2(x) = e^x \sin x$ yhtälön

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

perusjärjestelmän? Perustelu!

(b) Määrää yhtälön

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

yleinen ratkaisu.

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe 16.11.2005

Ei laskimia eikä kännyköita, taulukkokirjat sallitaan

1. Määrää alkuarvo–ongelman

$$y' = y^2 \sin x \cos x, \quad y(0) = 2$$

ratkaisu.

2. Määrää yhtälön

$$4x + 18y + 6xy' = 0$$

yleinen ratkaisu. Vihje: kokeile sopivaa integroivaa tekijää !

3. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' + 3y/x + 2 = x^2, \quad y(1) = 1.$$

4. Määrää yhtälön

$$y' + 6y = -2xy^5$$

yleinen ratkaisu.

5. Määrää alkuarvo–ongelman

$$y'' - 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

ratkaisu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaaliyhtälöt I
Lopputentti, 7. 3. 2006

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Määrää yhtälön
$$y' = 15y^2 \cos^2 x$$
yleinen ratkaisu.

2. Määrää yhtälön
$$(\ln x - y) - (x + y)y' = 0$$
yleinen rakaisu, kun $x > 0$ (implisiittinen ratkaisu riittää).

3. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\begin{cases} xy' + 3y = \dfrac{e^x}{x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$
välillä $(0, \infty)$.

4. Näytä, että funktio $y_1(x) = x^3$ on 2. kertaluvun lineaarisen homogeenisen yhtälön
$$x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$$
ratkaisu välillä $(0, \infty)$ ja määrää tämän jälkeen yhtälön perusjärjestelmä välille $(0, \infty)$. [Vihje: käytä kertaluvun pudotusta]

5. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = -3. \end{cases}$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaaliyhtälöt I
Loppukoe, 18. 5. 2006

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y' = x^2 e^{2y+1}$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö (implisiittinen ratkaisu riittää)
$$(\sin x + 3xy^2)y' + (y\cos x + y^3) = 0.$$

3. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y'(x) + \frac{4x^3}{x^4+2}y(x) = \frac{1}{x^2}$$
välillä $(0, \infty)$.

5. Näytä, että funktio $y_1(x) = e^x$ on 2. kertaluvun lineaarisen diffentiaaliyhtälön
$$(x+1)y'' + (2x+1)y' - (3x+2)y = 0$$
ratkaisu ja määrää sitten käyttämällä kertaluvun pudotusta yhtälön perusjärjestelmä välillä $(-1, \infty)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe, 9. 8. 2006

Ei laskimia eikä kännyköitä, MAOL:in taulukot sallitaan

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' = 2e^x(y+1), \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö (implisiittinen ratkaisu riittää)

$$(\ln x - 2xy + 2y) - (x^2 - 2x + e^y)y' = 0.$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(x^2+2)y'(x) + 2xy(x) = 2(x-3).$$

4. Näytä, että funktio $y_1(x) = e^{2x}$ on 2. kertaluvun lineaarisen homogeenisen yhtälön

$$(x+1)y'' - (x+2)y' - 2xy = 0$$

ratkaisu välillä $(-1, \infty)$ ja määrää tämän jälkeen yhtälön perusjärjestelmä välille $(-1, \infty)$. [Vihje: käytä kertaluvun pudotusta]

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = -3. \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälöt I

Kursssikoe 17.10.2006

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1-\frac{x}{t}+\left(\frac{x}{t}\right)^2, \\ x(1) &= 0.\end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}=\sin t$$

   yleinen ratkaisu.

3. Määritä yhtälön

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\cos 2t$$

   yleinen ratkaisu.

4. Populaatio kasvaa logistisen mallin

$$\frac{dN}{dt}=rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

   mukaisesti. Tiedetään, että $N(0)=K/10$ ja $N(1)=K/5$. Millä t:n arvolla $N(t)=K/2$?

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe, 16.11. 2006

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)^2\cos t,\\ x(0) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = e^t$$

yleinen ratkaisu.

3. Osoita differentiaaliyhtälö

$$2x\cos^2 y + \left(2y - x^2\sin 2y\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

eksaktiksi ja määritä sen yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää).

4. Määritä Bernoullin yhtälön

$$y'(x) + 2xy(x) + xy(x)^4 = 0$$

yleinen ratkaisu.

5. Tarkastellaan SIR-mallia

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI,\\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I,\\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I\end{aligned}$$

joukossa $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Tässä $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(a) Osoita, että $N := S + I + R$ on vakio.

(b) Osoita, että jos $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, niin raja-arvo $s_\infty := \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{N}$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln s_\infty.$$

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe, 6.3. 2007

1. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -te^{x(t)},\\ x(0) &= 0.\end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön
$$\ddot{x}(t) - x(t) = \cos t$$
yleinen ratkaisu.

3. Osoita differentiaaliyhtälö
$$2xy + 3 + \left(x^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$
eksaktiksi ja määritä sen yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää).

4. Määritä yhtälön
$$y'(x) = (x-y)^2 + 1$$
yleinen ratkaisu. Sisältyvätkö kaikki ratkaisut yleiseen ratkaisuun?

5. Tarkastellaan SIR-mallia
$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI,\\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I,\\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I\end{aligned}$$
joukossa $S \geq 0$, $I \geq 0$, $R \geq 0$. Tässä $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Oletetaan lisäksi että $I(0) > 0$.

   (a) Osoita, että $N := S + I + R$ on vakio.

   (b) Osoita, että jos $R_0 := \frac{\beta N}{\alpha} > 1$, niin raja-arvo $s_\infty := \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{N}$ on olemassa ja toteuttaa yhtälön
$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln s_\infty.$$

Differentiaaliyhtälöt I

Loppukoe, 15.5. 2007

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x^2 + 1,\\ x(0) &= 1.\end{aligned}$$

2. Määritä yhtälön

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \cos t$$

yleinen ratkaisu.

3. Osoita differentiaaliyhtälö

$$2xy + 3 + \left(x^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

eksaktiksi ja määritä sen yleinen ratkaisu (implisiittinen muoto riittää).

4. Yhtälön

$$y' + P(x)y = -2\sin x$$

eräs ratkaisu on $y = \cos x$. Määritä yleinen ratkaisu.

5. Populaatio kasvaa logistisen mallin

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

mukaisesti. Tiedetään, että $N(0) = K/10$ ja $N(1) = K/5$. Millä t:n arvolla $N(t) = K/2$?

Differentiaaliyhtälöt I

Koe 14.06.2007

1. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = \frac{2xy}{1+y}, \; y(0) = 1.$$

Implisiittinen ratkaisu riittää.

2. Ratkaise alkuarvo–ongelma

$$y' = y \tan x + \cos x, \; y(0) = 1.$$

3. Osoita, että yhtälö

$$\sin(x+y) + (2y + \sin(x+y))y' = 0$$

on eksakti ja määrää sen yleinen ratkaisu.

4. Määrää yhtälön

$$y' + 4y = xy^4$$

yleinen ratkaisu.

5. (a) Selitä, mikä on Eulerin menetelmä ensimmäisen kertaluvun yhtälölle.

   (b) Käyttäen Eulerin mentelmää määrää alkuarvo–ongelman

$$y' = y^2, y(1) = 1,$$

   ratkaisun likiarvo pisteessä 2, kun askelvälinä on $h = 1/3$. Vertaa oikeaan ratkaisuun