Helsingin yliopisto, Matematiikan laitos
Differentiaaligeometria
Loppukoe, 14.12.1999

1. Olkoon M differentioituva n-monisto. Anna tangenttikimpun TM määritelmä ja näytä, että sillä on (luonnollinen) differentioituva struktuuri.

2. Olkoot M ja N differentioituvia monistoja ja $f : M \to N$ diffeomorfismi. Jos $X \in \mathcal{T}(M)$, niin määritellään $f_*X \in \mathcal{T}(N)$ asettamalla

$$(f_*X)_p = f_*(X_{f^{-1}(p)}), \quad p \in N.$$

Osoita, että

$$[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y],$$

kun $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. [Huom. Yllä $\mathcal{T}(M)$ on M:n C^∞-vektorikenttien joukko ja f_* on f:n tangenttikuvaus.]

5. Olkoon $\sigma \subset T_pM$ 2-ulotteinen aliavaruus ja $u, v \in \sigma$ lineaarisesti riippumattomia. Osoita, että leikkauskaarevuus

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)u, v\rangle}{|u \wedge v|^2}$$

ei riipu vektoreiden $u \in \sigma$ ja $v \in \sigma$ valinnasta. [Huom. Tässä R on kuten Do Carmon kirjassa, ts.

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

ja $|u \wedge v| = \sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle}$.]

4. Olkoon M täydellinen Riemannin monisto ja oletetaan, että $K(\sigma) \leq 0$ kaikilla 2-ulotteisilla aliavaruuksilla $\sigma \subset T_pM$ ja kaikilla $p \in M$. Osoita, että $\exp_p\colon T_pM \to M$ on lokaali diffeomorfismi kaikilla $p \in M$.

5. Osoita, että jokaiselle yhtenäiselle Riemannin monistolle (M, g) voidaan antaa Riemannin metriikka $\tilde{g} = fg$ siten, että $f : M \to \mathbb{R}$ on positiivinen C^∞-funktio ja $(M, \tilde{g})$ on täydellinen.

Helsingin yliopisto, Matematiikan laitos
Differentiaaligeometria
Loppukoe, 17.06.2002

1. Olkoon M differentioituva monisto ja $p \in M$.
(a) Määrittele käsitteet *tangenttivektori pisteessä* $p \in M$ ja *tangenttiavaruus pisteessä* $p \in M$.
(b) Olkoon N toinen differentioituva monisto ja $f\colon M \to N$ C^∞-kuvaus. Määrittele f:n tangenttikuvaus pisteessä $p \in M$.

2. (a) Määrittele mitä tarkoitetaan differentioituvan moniston M suunnistuvuudella.
(b) Olkoot M ja N differentioituvia monistoja ja olkoon $f : M \to N$ diffeomorfismi. Osoita, että M on suunnistuva jos ja vain jos N on suunnistuva.

3. Olkoon M Riemannin monisto varustettuna Riemannin metriikalla $g = \langle\ ,\ \rangle$. Määrittele ensin ns. affiini konnektio ja sitten Riemannin konnektio.

4. Olkoon M Riemannin monisto. Määrittele käsitteet:
(a) geodeesi,
(b) eksponenttikuvaus,
(c) geodeettinen täydellisyys.

5. Olkoon M^n täydellinen Riemannin monisto. Oletetaan, että on olemassa vakio $H > 0$ siten, että $\mathrm{Ric}(x) \geq (n-1)H$ kaikilla $x \in TM$, $|x| = 1$. Osoita, että jokaisella geodeesilla γ, jonka pituus on vähintään $\pi/\sqrt{H}$, on konjugaattipareja.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
Loppukoe
16.12.2004

1. Olkoon M differentioituva monisto ja $p \in M$.
(a) Määrittele käsitteet *tangenttivektori pisteessä* $p \in M$ ja *tangenttiavaruus pisteessä* $p \in M$.
(b) Olkoon N toinen differentioituva monisto ja $f\colon M \to N$ C^∞-kuvaus. Määrittele f:n tangenttikuvaus pisteessä $p \in M$.

2. (a) Määrittele sileitten vektorikenttien $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ Lien hakatulo $[X, Y]$ ja osoita, että $[X, Y] \in \mathcal{T}(M)$.
(b) Laske $[V, W]$, kun

$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ja} \quad W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

ovat sileitä vektorikenttiä $\mathbb{R}^3$:ssa.

3. Olkoon $V \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ vektorikenttä

$$V = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Määrää V:n virtaus $\theta\colon \mathcal{D}(V) \to \mathbb{R}^2$. Onko V täydellinen?

4. Olkoon $T \in T^k(V)$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(a) $T \in \Lambda^k(V)$.
(b) $T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)T(v_1, \ldots, v_k)$ kaikilla $v_1, \ldots, v_k \in V$ ja kaikilla permutaatioilla $\sigma \in S_k$.
(c) T häviää aina kun kaksi sen argumenteista ovat samoja, ts.

$$T(v_1, \ldots, w, \ldots, w, \ldots, v_k) = 0.$$

5. Olkoon $X \in \mathcal{T}(M)$ sekä ω ja η sileitä differentiaalimuotoja. Osoita, että

$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
Loppukoe
20.1.2005

1. Todista seuraava *(Banachin) kiintopistelause:* Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ kuvaus. Oletetaan, että on olemassa sellainen vakio $L \in \mathbb{R}$, $0 \leq L < 1$, että

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste $x_0 \in X$, jolle pätee $f(x_0) = x_0$.

2. Olkoot M, N ja L differentioituvia monistoja sekä $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to L$ C^∞-kuvauksia. Osoita, että

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$$

kaikilla $p \in M$.

3. Olkoon $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ja $\theta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$,

$$\theta\big(t, (x, y)\big) = \theta_t(x, y) = \big(xe^{2t}, ye^{-3t}\big).$$

Osoita, että θ on virtaus ja määrää sen synnyttäjä (engl. infinitesimal generator).

4. Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ sileä differentiaali 1-muoto ja olkoot $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ sileitä vektorikenttiä. Osoita, että

$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big).$$

5. Olkoon $X \in \mathcal{T}(M)$ sekä ω ja η sileitä differentiaalimuotoja. Osoita, että

$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta).$$