

Analyysin peruskurssi

22.1.2009

1. Määää seuraavat raja-arvot:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin x}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n + 4} - \sqrt{n^2 + 1}$

2. Mitä reaalilukujen joukon täydellisyys tarkoittaa? Olkoot A ja B rajoitettuja joukkoja, joille $\sup A = 1$ ja $\sup B = 2$. Mitä voidaan sanoa luvusta $\sup A \cup B$?

3. Funktiot f ja g ovat kahdesti differentioituvia ja aidosti kasvavia. Oletetaan lisäksi, että $f''(x) < 0$, $g''(x) < 0$ kaikille x . Funktioiden f ja g kuvaajat ovat siis alaspäin konkaaveja. Osoita, että yhdistetyn funktion $f \circ g$ kuvaaja on alaspäin konkaavi.

4. Ympyrän $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ rajaama kiekko pyöriää x -akselin ympäri. Määää syntyneen toruksen tilavuus.

Calculus

January 22, 2009

1. Determine the limits:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x \sin x}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n + 4} - \sqrt{n^2 + 1}$

2. Explain what the completeness of the set of real numbers means. Let A and B be bounded sets with $\sup A = 1$ and $\sup B = 2$. What can you say about the number $\sup A \cup B$?

3. Functions f and g are twice differentiable and strictly increasing. They also satisfy $f''(x) < 0$, $g''(x) < 0$ for all x . The graphs of the functions f and g are hence concave down. Show that the graph of the composed function $f \circ g$ is concave down.

4. The disk bounded by the circle $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ rotates about the x -axis. Determine the volume of the solid torus thus obtained.