Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysin peruskurssi
Loppukoe/Huuskonen
14.6.2007

1. Olkoon $f(x) = \sin(e^x)\cos x$. Laske $f'(x)$.

2. Laske seuraavat raja-arvot:

   (a) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\sin(2x)}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+e^{2x}}$

3. (a) Tiedetään, että sini ja kosini ovat epänegatiivisia välillä $[0, \pi/2]$. Perustele lyhyesti esim. derivaatan tai yhteenlaskukaavan avulla, että kosini on aidosti vähenevä tällä välillä.

   (b) Tiedetään, että $\cos\pi/3 = 1/2$. Osoita, että yhtälöllä $\cos x = 1/2$ ei ole muita ratkaisuja välillä $[0, \pi/2]$. (Vihje: Tarkastele erikseen tapaukset $x < \pi/3$ ja $x > \pi/3$. Käytä aidon vähenevyyden määritelmää.)

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\sin x$. Etsi funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[0, \pi/2]$. (Edellisessä tehtävässä todistettavaa väitettä saa pitää tunnettuna.)

5. Esitä seuraava epäoleellinen integraali määritelmän mukaisena raja-arvolausekkeena ja laske sen arvo:

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$$

   (Vihje: Sijoita $u = -x^2$.)

Kaavoja (varuilta – taulukkokirjaa **saa** käyttää):

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x \sin y\\
\cos(x \pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x \sin y\\
\lim_{x\to\infty} e^x &= \infty
\end{aligned}$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysin peruskurssi
Loppukoe/Huuskonen
9.8.2007

1. Olkoon $f(x) = \dfrac{x \sin x}{\cos x}$. Laske $f'(x)$.

2. Laske seuraavat raja-arvot:

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sin(2x^2-8)}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1+e^{-x}}{x}$

3. Osoita, että $e^x \geq x+1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Vihjeitä: Tapaus $x = 0$, derivaatan etumerkki, kasvavuus ja vähenevyys.)

4. (a) Sievennä lauseke $\sin(x+y) - \sin(x-y)$.

   (b) Laske integraali $\int \sin(2x) \cos x \, dx$. (Vihje: Edellistä kohtaa voi käyttää tai olla käyttämättä.)

5. Suppeneeko vai hajaantuuko seuraava sarja? Mikäli suppenee, laske sen summa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$$

   (Vihje: Mitä on $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$?)

Kaavoja (varuilta – taulukkokirjaa **saa** käyttää):

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\lim_{x \to \infty} e^x &= \infty
\end{aligned}$$

Analyysin peruskurssi

24.1.2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x^2}{x \sin x}$
   b. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$
   c. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

2. Funktiot f ja g ovat kahdesti derivoituvia. Funktion f derivaatta on aidosti kasvava ja funktion g derivaatta on aidosti laskeva. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on korkeintaan kaksi ratkaisua.

3. Osoita, että jos $x \geq 0$:
   a. $e^x \geq 1 + x$,
   b. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!}$,
   c. $e^x \geq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

   Osoita viimeinen väite induktiolla.

4. Osoita, että $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx, p > 0, q > 0$.

Analyysin peruskurssi

3.4.2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x + x^2)}{\sin x}$
   b. $\lim_{x \to 0-} \sqrt{x}$

2. Osoita, että yhtälöllä $2x - 1 = \cos(x)$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

3. Määrää käyrän $y^2 - x^2 + x^4 = 0$ rajaaman alueen pinta-ala.

4. Määritellään funktio F asettamalla
   $F(x) = \int_0^{x^2} te^{t}\,dt.$
   Laske $F'(x)$.

Analyysin peruskurssi

20.5.2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{\sin x}$
   b. $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

2. Osoita matemaattisella induktiolla, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille k pätee
$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{k+1}\left(\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2}\right).$$

3. Käyrän $y^2 - x^2 + x^4 = 0$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määrää syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

4. Määritellään funktio F asettamalla
$$F(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt.$$
   Laske $F'(x)$.

Analyysin peruskurssi

12.6.2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{\sin^2 x}$
   b. $\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

2. Osoita matemaattisella induktiolla, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille k pätee
$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{k+1} \left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{2}\right).$$

3. Määrää käyrän $y^2 - x^2 + x^4 = 0$ rajaaman alueen pinta-ala.

4. Määritellään funktio F asettamalla
$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2)\ dt.$$
   Laske $F'(x)$.

Analyysin peruskurssi

14.8.2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x^2))}{x \sin x}$
   b. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$

2. Määrää funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ kuvaajien välillä $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ rajaamaan alueen pinta-ala.

3. Missä funktion $g(x) = e^{-x^2}$ kuvaaja on alaspäin konkaavi (alhaalta kovera)?

4. Määritellään funktio F asettamalla $F(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt$. Osoita, että funktio F on kasvava.

Analyysin peruskurssi
21.10.2008

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x^2))}{x \sin x}$
   b. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2. Mitä reaalilukujen joukon täydellisyys tarkoittaa? Olkoot A ja B rajoitettuja joukkoja, joille $\sup A = 1$ ja $\sup B = 2$. Mitä voidaan sanoa luvusta $\sup A \cup B$?

3. Funktio f on kahdesti differentioituva ja $f''(x) < 0$ kaikilla x. Osoita, että funktion f kuvaaja leikkaa funktion e^x kuvaajan korkeintaan kahdessa pisteessä.

4. Funktio Si (sini-integraalifunktio) määritellään asettamalla $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Määritelmässä oletetaan, että funktio $\frac{\sin t}{t}$ saa arvon 1, kun $t = 0$. Missä pisteessä funktio Si saa maksimiarvonsa?

Grundkurs i analys
21.10.2008

1. Bestäm följande gränsvärden:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x^2))}{x \sin x}$
   b. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2. Vad betyder fullständigheten av mängden av reella tal? Låt A och B vara begränsade mängder med $\sup A = 1$ och $\sup B = 2$. Vad kan man säga om talet $\sup A \cup B$?

3. Funktionen f är två gånger deriverbar och $f''(x) < 0$ för varje x. Bevisa att grafen av funktionen f skär grafen av funktionen e^x i högst två punkter.

4. Funktionen Si (sinus integral funktionen) definieras med formeln $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. I definitionen antas att funktionen $\frac{\sin t}{t}$ får värdet 1 när $t = 0$. I vilken punkt antar funktionen Si sitt maximum?

Analyysin peruskurssi

22.1.2009

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x \sin x}$
   b. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+1}$

2. Mitä reaalilukujen joukon täydellisyys tarkoittaa? Olkoot A ja B rajoitettuja joukkoja, joille $\sup A = 1$ ja $\sup B = 2$. Mitä voidaan sanoa luvusta $\sup A \cup B$?

3. Funktiot f ja g ovat kahdesti differentioituvia ja aidosti kasvavia. Oletetaan lisäksi, että $f''(x) < 0, g''(x) < 0$ kaikille x. Funktioiden f ja g kuvaajat ovat siis alaspäin konkaaveja. Osoita, että yhdistetyn funktion $f \circ g$ kuvaaja on alaspäin konkaavi.

4. Ympyrän $x^2 + (y-2)^2 = 1$ rajaama kiekko pyörähtää x-akselin ympäri. Määrää syntyneen toruksen tilavuus.

Calculus

January 22, 2009

1. Determine the limits:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x \sin x}$
   b. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+1}$

2. Explain what the completeness of the set of real numbers means. Let A and B be bounded sets with $\sup A = 1$ and $\sup B = 2$. What can you say about the number $\sup A \cup B$?

3. Functions f and g are twice differentiable and strictly increasing. They also satisfy $f''(x) < 0, g''(x) < 0$ for all x. The graphs of the functions f and g are hence concave down. Show that the graph of the composed function $f \circ g$ is concave down.

4. The disk bounded by the circle $x^2 + (y-2)^2 = 1$ rotates about the x-axis. Determine the volume of the solid torus thus obtained.

Analyysin peruskurssi
2.4.2009

Laskimia ei saa käyttää.

1. Mitä reaalilukujen joukon täydellisyys tarkoittaa? Ovatko kokonaislukujen joukko ja rationaalilukujen joukko täydellisiä samassa mielessä, kuin reaalilukujen joukko? Perustele vastauksesi.

2. Osoita matemaattisella induktiolla, että $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ kaikille positiivisille kokonaisluvuille n.

3. Osoita, että $\frac{x}{2}<\sin x<x$, kun $0<x<1$. Käytä hyväksi tietoa $\cos 1 \approx 0.54$.

4. Käyrän $y^2-x^2+x^4=0$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määrää syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

Analyysin peruskurssi
11.6.2009

EI LASKIMIA EIKÄ TAULUKOITA.

1. Funktio f määritellään asettamalla $f(x) = \begin{cases} \frac{c\sin x}{x}, x > 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x^2}, x < 0 \end{cases}$. Millä parametrin c arvolla funktio voidaan määritellä origossa siten, että funktio on kaikkialla jatkuva?

2. Mitä reaalilukujen joukon täydellisyys tarkoittaa? Olkoot A ja B rajoitettuja joukkoja, joille $A \cap B \neq \emptyset, \sup A = 1$ ja $\sup B = 2$. Mitä voidaan sanoa luvusta $\sup A \cap B$?

3. Hahmottele funktion e^{-x^2} kuvaaja. Määrää funktion käännepisteet ja välit, joilla funktion kuvaaja on ylöspäin konkaavi.

4. Ympyrän $x^2 + (y-1)^2 = 1$ rajaama kiekko pyörähtää x-akselin ympäri. Määrää syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.