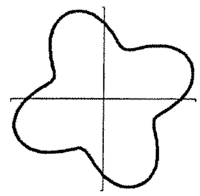
Analyysin peruskurssi
20.1.2005

Tehtävässä 3 ratkaise joko osa a) tai osa b). Jos molemmat osat on ratkaistu, molemmat ratkaisut arvostellaan ja parempi ratkaisu jätetään huomiotta.

1. Määrää seuraavat raja-arvot:
   a. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-2x}$
   b. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
2. Määrää seuraavat integraalit:
   a. $\int \dfrac{1}{4+x^2}dx$
   b. $\int \cos^5(x)\,dx$
3. Ratkaise **toinen** seuraavista tehtävistä:
   a. Määrää napakoordinaatistossa annetun käyrän $r^2 = 2+\sin(4\theta)$ rajaaman alueen pinta-ala.
   b. Määrää käyrän $y=\cosh(x)$, $0 \le x \le 1$, pituus.



$r^2 = 2+\sin(4\theta)$

4. Esitä integraali $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{1+x^3}dx$ suppenevan alternoivan sarjan summana korvaamalla integroitava funktio sen Taylorin sarjakehitelmällä origossa. Approksimoi integraalin arvoa em. sarjan osasummalla siten, että virhe on < 0.0001. Perustele vastauksesi.

Analyysin peruskurssi
14.4.2005

1. Oletetaan, että $a > 0$ ja $b > 0$. Osoita, että
$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a \, dx$$

2. Laske seuraavat integraalit:
   a. $\int \ln(x) \, dx$
   b. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} \, dx$

3. Määrää kuulan $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ tason $z = r - h$, $0 \leq h \leq r$, yläpuolelle jäävän osan tilavuus.

4. Millä parametrin p arvoilla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ suppenee?

Analyysin peruskurssi
10.8.2005

1. Määrää seuraavat raja-arvot:

   a. $\lim_{x \to 0+} x^x$

   b. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin^2(x))}{x^2}$

2. Integroi

   a. $\int \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$

   b. $\int \sin^3(x)\,dx$

   c. $\int x^2 e^x\,dx$

3. Paraabelin $y = 6x - 6x^2$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määrää näin syntyneen kappaleen tilavuus.

4. Käyttämällä funktion $f(x) = \sin(x^2)$ Taylorin sarjakehitelmää, määrä integraalille $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ likiarvo, jonka virhe on korkeintaan 0.01. Perustele vastauksesi.

Analyysin peruskurssi
25.10.2005

1. Funktion f derivaatta on jatkuva, $f(0)=0$ ja $f'(0)=1$. Määrää raja-arvo $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{f(2x)}$.

2. Osoita, että $\sqrt{1+x} \le \frac{x}{4}+\frac{5}{4}$ kaikille $x \ge 3$.
3. Laske seuraavat integraalit
   a. $\int x^2 \sin(x)\,dx$
   b. $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$
4. Käyttämällä Taylorin sarjoja, laske likiarvo integraalille $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ siten, että virhe on korkeintaan 0.01. Perustele vastauksesi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysin peruskurssi
Loppukoe
26.1.2006

1. Määrää

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{2x + x^2}.$$

2. Määrää suurin ja pienin arvo, mitkä funktio $f(t) = t^2 - t$ saa välillä $-1 \leq t \leq 1$.

3. Laske

$$\int_0^\infty (1 - x)e^{-x} dx.$$

4. Määrää sen alueen ala, jota rajoittaa käyrä

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

5. Määrää ne suorien

$$x + y = 0$$

ja

$$x - y + 4 = 0$$

leikkauspisteen kautta kulkevat suorat, joiden etäisyys pisteestä $(0, 4)$ on 2.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysin peruskurssi
Loppukoe
3.4.2006

1. Määrää
$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(\pi - x)^2}.$$

2. Määrää suurin ja pienin arvo, mitkä funktio $f(x) = xe^x$ saa välillä $-3 \leq x \leq 3$.

3. Laske
$$\int_0^\infty \frac{x(x+2)}{(1+x)^4} dx.$$

4. Laske alueen
$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq x \sin x\}$$
ala.

5. Pisteen $(5, 3)$ kautta kulkevat ympyrän $x^2 + y^2 = 0$ tangentit määrättävä.

Analyysin peruskurssi
Loppukoe
24.10.2006

Taneli Huuskonen

22. lokakuuta 2006

1. Olkoon $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Etsi funktion f pienin ja suurin arvo välillä $[0, 2]$.

2. Laske seuraavat raja-arvot:

   (a) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{1-2x}}{1 + e^{2-2x}}$

   (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin x^2}$

   (c) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$

3. Laske seuraavat integraalit:

   (a) $\int_0^{\pi/3} (x^2 - x) \sin x \, dx$

   (b) $\int \tan x \, dx$ (Vihje: Sijoita $u = \sin x$.)

4. Olkoon jono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ määritelty siten, että $a_0 = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Osoita, että raja-arvo $\lim_{n \to \infty} a_n$ on olemassa. (Vihje: Jono on mm. monotoninen.)

5. Suppenevatko seuraavat sarjat? Perustele.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$

Analyysin peruskurssi
Loppukoe
25.1.2007

Taneli Huuskonen

25. tammikuuta 2007

1. Olkoon $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Etsi funktion f pienin ja suurin arvo välillä $[0, 2]$.

2. Laske seuraavat raja-arvot:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{1-2x}}{1 + e^{2-2x}}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\cos(2x) - 1}$

3. Laske seuraavat integraalit:

   (a) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

   (b) $\int \sin^3 x \, dx$ (Vihje: Sijoita $u = \cos x$.)

4. Määritellään $f(a) = \int_1^a \frac{1}{x} \, dx$, kun $a > 0$. Osoita pelkästään integraalin ominaisuuksien perusteella (käyttämättä logaritmifunktion ominaisuuksia), että $f(ab) = f(a) + f(b)$, kun $a, b > 0$. (Vihje: Sijoita $t = ax$ integraalissa $\int_a^{ab} \frac{1}{x} \, dx$.)

5. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{x} \, dx?$$

   (Vihje: Vertailuperiaate.)

Analyysin peruskurssi
Loppukoe
12.4.2007

Taneli Huuskonen

12. huhtikuuta 2007

1. Olkoon $f(x) = e^x - 3x$. Etsi funktion f pienin ja suurin arvo välillä $[0, 1]$.
2. Olkoon $f(x) = x^2 - 2$. Laske Newtonin menetelmällä peräkkäiset likiarvot x_1, x_2 ja x_3 funktion f juurelle lähtien arvosta $x_0 = 1$.
3. Laske $f''(0)$, kun $f(x) = x^2 - 2^x$.
4. Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee
$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0.$$
(Vihje: l'Hospitalin sääntö ja induktio.)
5. Määritellään $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ epäoleellisen integraalin avulla seuraavasti:
$$f(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt.$$
Osoita, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee
$$f(n+1) = (n+1)f(n).$$
Edellisessä tehtävässä todistettavan väitteen saa tässä olettaa todeksi. (Vihje: Osittaisintegrointi.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysin peruskurssi
Loppukoe/Huuskonen
22.5.2007

1. Olkoon $f(x) = x^3 - 2x$. Etsi funktion f pienin ja suurin arvo v'lill' $[0, 1]$.

2. M"rit' raja-arvo $\lim_{x\to\infty} x \sin xe^{-x}$. (Vihje: Kirjoita lauseke $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ muodossa, johon voi soveltaa l'Hospitalin s"nt;', ja sovella t'm'n j'lkeen vohveliperiaatetta.)

3. Laske $f''(0)$, kun $f(x) = \sin e^{-x}$.

4. Laske integraali
$$\int_0^\pi \cos xe^{\sin x}\,dx.$$
(Vihje: Sijoitus.)

5. Osoita m"ritelm'n perusteella, ett' ep'oleellinen integraali
$$f(n) = \int_0^\infty te^{-t}\,dt$$
suppenee. (Vihje: Osittaisintegrointi, l'Hospitalin s"nt;.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysin peruskurssi
Loppukoe/Huuskonen
14.6.2007

1. Olkoon $f(x) = \sin(e^x)\cos x$. Laske $f'(x)$.

2. Laske seuraavat raja-arvot:

   (a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\sin(2x)}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+e^{2x}}$

3. (a) Tiedetään, että sini ja kosini ovat epänegatiivisia välillä $[0, \pi/2]$. Perustele lyhyesti esim. derivaatan tai yhteenlaskukaavan avulla, että kosini on aidosti vähenevä tällä välillä.

   (b) Tiedetään, että $\cos\pi/3 = 1/2$. Osoita, että yhtälöllä $\cos x = 1/2$ ei ole muita ratkaisuja välillä $[0, \pi/2]$. (Vihje: Tarkastele erikseen tapaukset $x < \pi/3$ ja $x > \pi/3$. Käytä aidon vähenevyyden määritelmää.)

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\sin x$. Etsi funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[0, \pi/2]$. (Edellisessä tehtävässä todistettavaa väitettä saa pitää tunnettuna.)

5. Esitä seuraava epäoleellinen integraali määritelmän mukaisena raja-arvolausekkeena ja laske sen arvo:

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$$

   (Vihje: Sijoita $u = -x^2$.)

Kaavoja (varuilta – taulukkokirjaa **saa** käyttää):

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x\cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\lim_{x\to\infty} e^x &= \infty
\end{aligned}$$