

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Analyysin peruskurssi

Korvaava välikoe 21.10.2004/Huuskonen

1. Ratkaise yhtälö  $|2x - 3| = 3|x| - 2$ .
2. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - \sqrt{x}}.$$

3. Laske yhtälön

$$x^2 - 2y^3 = 0$$

määräämän käyrän tangentin kulmakerroin pisteessä  $x = 4, y = 2$ .

4. Newtonin iteraatiolla ratkaistaan yhtälöä  $1/x^2 = 1/2$  lähtien likiarvosta  $x_0 = 1$ . Mikä on ratkaisun likiarvo  $x_1$  ensimmäisen iteraatiokierroksen jälkeen?

Analyysin peruskurssi

1. välikoe

25.10.2004

1. Hahmottele funktion  $f(x) = |x^2 - 2|x| + 1|$  kuvaaja.
2. Määrää raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ .
3. Määrää ne käyrän  $2yx - x - y + 1 - y^2 + x^2 = 0$  pisteet, joissa käyrän tangentin kulmakerroin on 1.
4. Osoita, että  $\sqrt[3]{x} \leq \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$  kun  $x \geq 1$ .

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Analyysin peruskurssi

Korvaava välikoe 28.10.2004/Huuskonen

1. Olkoon  $A = \{1/(n + 1/2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Määritä joukon  $A$  supremum ja infimum. Perustele.
2. Derivoi funktio  $f(x) = \cos(x^3)$ .
3. Osoita induktiolla, että  $n^2 \leq 3^n - 1$  kaikilla luonnollisilla luvuilla  $n \geq 1$ .
4. Yhtälö  $y^3 + y = x^2 + x$  määrittelee  $y$ :n yksikäsitteisesti  $x$ :n funktiona. Osoita, että tämä funktio on aidosti kasvava välillä  $[0, 1]$ .

Analyysin peruskurssi

1. välikoe

14.3.2005

1. Funktion  $f$  derivaatta on  $f'(x) = (x - 2)(x - 1)^2 e^x$ . Missä pisteissä funktiolla  $f$  on lokaalit ääriarvot? Ilmoita jokaisen ääriarvopisteen osalta onko kysymyksessä lokaali minimi vai maksimi. Määrää funktion  $f$  käännepisteet, jos niitä on (käännepiste, englanniksi inflection point).
2. Määrää raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .
3. Osoita, että  $\sqrt[4]{x} \leq \frac{x}{4} + \frac{3}{4}$  kun  $x \geq 1$ .
4. Funktio  $f$  määritellään asettamalla  $f(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt$ . Määrää  $f'(0)$ .  
Perustele vastauksesi.

Analyysin peruskurssi

1. välikoe

31.3.2005

1. Määrää raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{\arcsin(2x)}$ .

2. Osoita, että  $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$  kun  $x \geq 0$ .

3. Laske integraalit

a.  $\int \sin^5(x) \cos^3(x) dx$

b.  $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

4. Funktio  $f$  määritellään asettamalla  $f(x) = \int_x^0 e^{-t^2} dt$ . Määrää  $f'(0)$ .

Perustele vastauksesi.

Matematiikan laitos  
Analyysin peruskurssi  
1. kurssikoe  
24.10.2005

1. Määrää tason

$$x + 2y + 3z = 3$$

etäisyys origosta.

2. Määrää sen tetraedrin tilavuus, jonka kolme sivusärmää ovat  $i$ ,  $3j$  ja  $4k$ .

3. Määrää

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + |x|} - \sqrt{1 + x^2}}{|x|}.$$

4. Olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaus, jolle

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (x + t)^3.$$

Onko  $f$  surjektio, injektio tai bijektio?

Analyysin peruskurssi

1. välikoe

27.2.2006

Perustele kaikki vastaukset ja näytä laskujen välivaiheet. Pelkkä vastaus antaa 0 pistettä, vaikka se olisi oikein.

1. Määrää raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+x}}$ .

2. Osoita, että yhtälöllä  $\sin(x) = \frac{1}{1+|x|^2}$  on ratkaisu välillä  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

3. Laske funktion  $f(x) = \frac{1+e^x}{1+2^x}$  derivaatta.

4. Funktio  $f$  on differentioituva,  $f'(0) = 1$  ja  $g(x) = f(\arcsin(2x))$ .  
Määrää  $g'(0)$ .

Analyysin peruskurssi

1. välikoe

1.3.2006

Perustele kaikki vastaukset ja näytä laskujen välivaiheet. Pelkkä vastaus antaa 0 pistettä, vaikka se olisi oikein.

1. Määrää raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + \sin(x)} - \sqrt{1 + 2 \sin(x)}}$ .

2. Osoita, että yhtälöllä  $e^x \sin(x) = \cos(x)$  on ratkaisu välillä  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

3. Laske funktion  $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$  derivaatta.

4. Funktio  $f$  on differentioituva,  $f'(0) = 1$  ja  $g(x) = e^{\cos(2x)}f(x)$ .  
Määrää  $g'(0)$ .



Analyysin peruskurssi  
Kurssikoe 1 (korvaava)  
17.10.2006

Taneli Huuskonen

16. lokakuuta 2006

1. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

(Vihje: Lavenna lausekkeella  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ . Voit pitää tunnettuna, että  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ .)

2. Osoita induktiolla, että  $1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .  
3. Osoita suoraan määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

4. Olkoon  $\alpha \in [0, \pi]$  sellainen, että  $\cos \alpha = -3/5$ . Laske luvun  $\tan \alpha$  tarkka arvo. (Vihje: Laske ensin  $\sin \alpha$ . Etumerkin perusteluksi riittää esim. kuvio tai yleinen toteamus sinin etumerkistä sopivalla välillä.)

Analyysin peruskurssi  
Kurssikoe 1  
23.10.2006

Taneli Huuskonen

20. lokakuuta 2006

1. Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2006n^2 + n + 1}{17n^2 + 2}.$$

2. Ratkaise itseisarvoyhtälö

$$|2x - 4| = |x + 1|.$$

3. Osoita induktiolla, että  $0 + 1 + \dots + n = n(n + 1)/2$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x + 42)(x - 2006)$ . Onko  $f$  bijektio? (Vihje: tarkastele yhtälöä  $f(x) = 0$ .)

# Virtuaalinen analyysin peruskurssi

## 1. Välikoe

1.3.2007

1. Derivoi seuraavat funktiot

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b)  $g(x) = 2xe^x$

c)  $h(x) = \sin(x^2)$

2. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{5+2x} - \sqrt{5+x}}$ .

3. Osoita, että yhtälöllä  $\sin(x) = 2x - 1$  on ratkaisu.

4. Osoita matemaattisella induktiolla, että

$$n^2 > n + 1$$

kun  $n$  on positiivinen kokonaisluku ja  $n \geq 2$

Virtuaalinen analyysin peruskurssi

1. Välikoe

6.3.2007

1. Laske funktion  $f(x) = (7 - 2x)e^{-8x}$  derivaatta.

2. Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - 4x + 1}}$ .

3. Ratkaise joko kohta a) tai b). Molempia **ei saa** tehdä (jos teet molemmat, huonommin mennyt otetaan mukaan arvosteluun).

a) Etsi lauseke funktion  $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$  käänteisfunktiolle.

b) Funktio  $f$  on differentioituva.  $f'(1) = 2$  ja  $g(x) = f(e^x)$ . Määrä  $g'(0)$ .

4. Osoita matemaattisella induktiolla, että

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \text{ kaikilla } n = 2, 3, \dots,$$

kun  $x > -1$  ja  $x \neq 0$ .