

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

22. 5. 2007

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan funktiota $[0, 1]$, jolle $f(x) = |2x - 1|$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 7^{-100}$.

2. Laske

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \sin k}{2 + k}?$$

4. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva. Määritellään jokaisella $n = 1, 2, 3, \dots$ funktio f_n yhtälöllä $f_n(x) = f(x - \frac{1}{n})$. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$.

(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (x + 1)}{(x - 1)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

4. 3. 2008

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota , jolle $f(x) = |x^2 - 1|$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. Tieto, että $x^2 \leq x$ kaikilla $x \in [0, 1]$ auttaa.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_1^\infty \frac{x^7}{e^x} dx?$$

Vihje: Osoita ensin, että $e^x > x^9$ kun x on kyllin suuri.

4. Määritellään funktiot $f_n :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{n}}.$$

Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti?

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$.

(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (x + 1)}{(x - 1)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

13. 5. 2008

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota , jolle $f(x) = x^2 - x$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{x^3} dx \leq e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. Tieto, että $x^3 \leq x$ kaikilla $x \in [0, 1]$ auttaa.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3 + 2}?$$

4. Tarkastellaan funktioita $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln x,$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

5. Selvitä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2}$$

käyttämällä funktion $\cos t$ sopivaa Taylorin polynomia, jossa $x_0 = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

20. 5. 2008

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota , jolle $f(x) = x^2 - x$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{x^3} dx \leq e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. Tieto, että $x^3 \leq x$ kaikilla $x \in [0, 1]$ auttaa.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3 + 2}?$$

4. Tarkastellaan funktioita $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln x,$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

5. Selvitä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2}$$

käyttämällä funktion $\cos t$ sopivaa Taylorin polynomia, jossa $x_0 = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

12. 6. 2008

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota, jolle $f(x) = x^3 - 2x$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti. Tieto, että $x^3 \leq x$ kaikilla $x \in [0, 1]$ auttaa.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}?$$

4. Tarkastellaan funktioita $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^x,$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

5. Selvitä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2}$$

käyttämällä funktion $\cos t$ sopivaa Taylorin polynomia, jossa $x_0 = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

14. 8. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota f , jolle $f(1) = 7$ ja $f(x) = 2$ kun $x \neq 1$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Osoita, että

$$\int_0^1 e^{x^7} dx \leq e - 1.$$

Huom: ET pysty laskemaan ko. integraalia tarkasti.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_1^\infty \frac{x^7}{e^x} dx?$$

Vihje: Osoita ensin, että $e^x > x^9$ kun x on kyllin suuri.

4. Määritellään funktiot $f_n :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f_n(x) = \frac{7}{x + \frac{7}{n}}.$$

Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti?

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$.

(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (x + 1)}{(x - 1)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

21. 10. 2008

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Laske

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x + 1} dx.$$

2. Osoita, että

$$\int_0^1 (\sin x)^{\sin x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa, että $\sin x \leq x$ kaikilla $x \geq 0$.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k}{3k^3 - 1}?$$

4. Suppeneeko funktiojono (f_n) tasaisesti välillä $]1, \infty[$, jos kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ ja $x > 1$ on määritelty $f_n(x) = \frac{1}{n} \ln x$?

4. Selvitä käyttämällä funktion $\cos t$ sopivaa Taylorin polynomia kohdassa $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2}.$$

5. Pitääkö seuraava väite paikkansa? Jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx$$

suppenee, niin

$$\int_{k=1}^{\infty} f(x) dx$$

suppenee? Perustelu!

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

12. 11. 2008

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota , jolle $f(1) = 2008$ ja $f(x) = -2008$ kun $x \neq 1$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Laske

$$\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx.$$

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{2^x} dx?$$

4. Määritellään funktiot $f_n :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti?

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$.

(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (x + 1)}{(x - 1)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

3. 3. 2009

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Laske

$$\int_0^{\pi/3} e^x \sin x \, dx.$$

Vihje: osittaisintegrointi auttaa.

2. (a) (2 pist.) Selitä Riemannin ehto. (Sitä ei täydy todistaa.)

(b) (4 pist.) Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdoilla $f(0) = 0$ ja $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$. Osoita (esimerkiksi Riemannin ehdon avulla), että funktio f on (Riemann-)integroituva välillä $[0, 1]$.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} ?$$

4. Määritellään funktiot $f_n :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{2x + \frac{1}{3n}}.$$

Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti?

5. (a) (3 pist.) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$.

(b) (3 pist.) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (x+1)}{(x-1)^2}.$$

Muista virhetermin käsittely.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi II

Erillistentti ("loppukoe") 19.5. 2009

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Laske

$$\int_0^1 e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}} dx.$$

2. Suppeneeko

$$\int_1^\infty \frac{2x}{3x^3 + 5} dx?$$

3. Suppeneeko funktiojono f_1, f_2, \dots tasaisesti välillä $[-1, 1]$ jos kaikilla n on

$$f_n(x) = \frac{x^{3n}}{5n}?$$

4. Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ suppenemissäde on 7. Oletetaan, että kaikilla k on $|b_k| > |a_k|$ ja että sarjan $\sum_{k=0}^\infty b_k x^k$ suppenemissäde on R . Osoita että $R \leq 7$.

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sin x + \cos x$ Taylorin polynomi $T_2(x; \frac{\pi}{4})$.

(b) Selvitä edellisen kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(4x - \pi)^2}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Erillistentti ("loppukoe")

11. 6. 2009

1. Laske

$$\int_1^2 x e^x dx.$$

2. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx?$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}?$$

Tarkka perustelu!

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä

$$f_n(x) = x^{2009} + \frac{1}{n^2 x^2 + n}.$$

Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti koko \mathbb{R} :ssä.

5. Funktiosta f oletetaan, että toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $]0, 2[$ ja että $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ ja $f''(1) = 84$. Muodosta funktiolle f Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$ ja selvitä sen ja siihen liittyvän Taylorin kaavan avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Tarkka perustelu!