

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2
Loppukoe 16. 3. 2004

1. Laske

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x \, dx.$$

Sijoitus $x = \sin t$ auttaa yhdessä osittaisintegroinnin kanssa. (Tässä tarkoitetaan arcussinin päähaaraa.)

2. Määritellään

$$F(x) = x + \int_1^{2+\sin x} e^t \, dt + \int_x^3 e^{2+\sin t} \cos t \, dt$$

ja oletetaan, että $F(0) = a$. Laske $F(1)$.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin^2 x}}{x^2} \, dx?$$

4. Anna esimerkki potenssisarjasta, jonka suppenimissäde on 2004.

5. Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ sopivaa astelukua oleva Taylorin kehitelmä $f(x) = T_{n-1}(x; 1) + R_n(x; 1)$, (missä siis $x_0 = 1$) ja määritä kehitelmän avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{(x-1)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

Loppukoe

25. 5. 2004

1. Määritellään funktio $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(1) = 1$ ja $f(x) = 2$ kun $x \neq 1$. Osoita määritelmän perusteella, että f on Riemann-integroituva välillä $[0, 2]$.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x}}{x} dx?$$

3. Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$? Tarkka perustelu!

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä kaikilla n on $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2$. Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti? Tarkka perustelu!

5. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(e^x - 1)}{(e^x - 1)^3}.$$

Tässä kannattaa käyttää funktion $\sin y$ sopivaa Taylorin kaavaa tapauksessa $x_0 = 0$.

MATEMATIIKAN LAITOS
Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2
Loppukoe
18. 6. 2004

1. Määritellään funktio $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(1) = 7$ ja $f(x) = x^2$ kun $x \neq 1$. Osoita, että f on Riemann-integroituva välillä $[0, 2]$.

2. Määritä polun $x(t) = t^3; y(t) = t$ tangentti kohdassa $t = 2$.

3. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin^2 x}}{x^2} dx?$$

4. Oletetaan, että positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee. Suppeneeko välttämättä sarja $\sum_{p=1}^{\infty} x_{2p}$?

5. Esitä geometrisen sarjan summakaavan avulla funktio $f(x) = \frac{x}{1-x^6}$ potenssisarjana, joka suppenee välillä $] -1, 1[$. Määritä sarjan avulla $f^{(25)}(0)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

Loppukoe

10. 8. 2004

1. Määritellään funktio $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = 2x$. Osoita määritelmän perusteella, että f on Riemann-integroituva (vetoamatta siis siihen, että jokainen jatkuva funktio on Riemann-integroituva.) välillä $[0, 2]$.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2} dx?$$

3. Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$? Tarkka perustelu!

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä kaikilla n on $f_n(x) = x + \frac{1}{n}x^2$. Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti? Tarkka perustelu!

5. Etsi Taylorin polynomien avulla rationaaliluku q , jolle $|q - \sin 1| < 0,0002$. Tarkka perustelu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2
Loppukoe
11. 11. 2004

Tehtävät ovat aihepiirin mukaisessa järjestyksessä.

1. Tutkitaan rajoitetun funktion $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integroituvuutta, kun kaikilla x on $f(x) = 7x + 1$. Anna esimerkki jaosta D , jolle ylä- ja al summien erotus $S_D - s_D$ on pienempi kuin 2^{-10} .

2. Laske

$$\int_1^e x \ln x dx.$$

3. Oletetaan, että positiiviterminen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee. Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_k}}{k}$$

suppenee. Epäyhtälöstä $xy \leq (x^2 + y^2)/2$ on apua, jos ajattelet jälkimmäisen sarjan yhteenlaskettavia tuloina.

4. Tarkastellaan funktioiden $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ muodostamaa jonoa, missä kaikilla $n = 1, 2, \dots$ ja kaikilla $x \in [0, 1]$ on $f_n(x) = x^{1/n}$. Suppeneeko jono tasaisesti?

5. Määritä Taylorin kaavan avulla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - x \cos x}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

Loppukoe

21. 3. 2005

1. Tutkitaan funktiota $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ missä $f(x) = 0$ kun $x < 1$ ja $f(1) = 3$. Osoita, että funktio f on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$.

2. Tarkastellaan aidosti kasvavaa funktiota $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $f(x) = \sin x - \cos x$ kaikilla x . Laske käänteisfunktion integraali

$$\int_0^1 f^{-1}(y) dy$$

Voit esimerkiksi käyttää sijoitusta $y = f(x)$.

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}?$$

Tarkka perustelu!

4. Tarkastellaan funktioita $f_n :]-10, 10[\rightarrow \mathbb{R}$, missä kaikilla n on $f_n(x) = x + \frac{1}{n}x^2$. Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti? Tarkka perustelu!

5. Etsi Taylorin polynomien avulla rationaaliluku q , jolle

$$\left| q - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{1000}.$$

Tarkka perustelu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

Loppukoe

24. 5. 2005

Tehtävät ovat aihepiirin mukaisessa järjestyksessä.

1. Tutkitaan rajoitetun funktion $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integroituvuutta, kun kaikilla $x \in [-1, 3]$ on $f(x) = |x - 1|$. Anna esimerkki jaosta D , jolle ylä- ja alasummien erotus $S_D - s_D$ on pienempi kuin 2^{-10} .

2. Laske

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}?$$

Vihje: kannattaa käyttää apuna integraalia.

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä $f_n(x) = \frac{x^3}{n}$. Suppeneeko jono pisteittäin? Onko suppeneminen tasaista?

5. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3}.$$

Tässä auttaa sopiva funktion $\sin t$ Taylorin kehitelmä kohdassa $t = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

Loppukoe

10. 8. 2005

1. Tutkitaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä rajoitettua funktiota f . Tarkastellaan välin $[0, 2]$ jakoja $D_1 = \{0, 1, 2\}$ ja $D_2 = \{0, 1/3, 3/2, 2\}$. Oletetaan, että $7 \leq S_{D_1} < 7 + 2^{-17}$ ja $7 - 2^{-17} \leq S_{D_2} < 7$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 2^{-16}$. Perustelu!

2. Oletetaan, että funktio f on kaikkialla jatkuvasti derivoituva (ts. derivaat-funktio on jatkuva.) Oletetaan, että $f(0) = 1 = f(1)$. Laske

$$\int_0^1 f(x)f'(x)e^{f(x)} dx.$$

Vihje: osittaisintegrointi.

3. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^{x^2}} dx?$$

Jos se suppenee, niin laske sen arvo.

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0, 1] \rightarrow R$, missä

$$f_n(x) = x^2 + n \cos\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$.

5. Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}.$$

Tarkka perustelu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

16. 11. 2005

Tehtävät ovat aihepiirin mukaisessa järjestyksessä.

1. Tutkitaan rajoitetun funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integroituvuutta, kun kaikilla x on $f(x) = x^2$. Anna esimerkki jaosta D , jolle ylä- ja alasummien erotus $S_D - s_D$ on pienempi kuin 2^{-10} .

2. Laske

$$\int_1^e x \ln x dx.$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}?$$

Vihje: kannattaa käyttää apuna integraalia.

4. Tarkastellaan funktioiden $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ muodostamaa jonoa, missä kaikilla $n = 1, 2, \dots$ ja kaikilla $x \in [0, 1]$ on $f_n(x) = \frac{1}{n}x$. Suppeneeko jono tasaisesti? Tarkka perustelu!

5. Määritä Taylorin kaavan avulla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

7. 3. 2006

1. Tutkitaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä rajoitettua funktiota f . Tarkastellaan välin $[0, 2]$ jakoja $D_1 = \{0, 1, 2\}$ ja $D_2 = \{0, 1/2, 3/2, 2\}$. Oletetaan, että $7 \leq S_{D_1} < 7 + 2^{-17}$ ja $7 - 2^{-17} \leq s_{D_2} < 7$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 2^{-16}$. Perustelu!

2. Laske

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x e^{\sin x} dx.$$

Vihje: osittaisintegrointi.

3. Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx?$$

Jos se suppenee, niin laske sen arvo.

4. Tarkastellaan jonoa funktioita $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \cos(n^2 x).$$

Suppeneeko jono tasaisesti?

5. Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - e^{x-1}}{(x-1)^2}.$$

Tarkka perustelu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

18. 5. 2006

1. Osoita Riemann-integraalin määritelmän perusteella, että funktio $f(x) = |2x - 1|$ on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$.

2. Laske

$$f(x) = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}?$$

Tarkka perustelu!

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0, 2006] \rightarrow \mathbb{R}$, missä

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cos x + \cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti välillä $[0, 2006]$.

5. Funktiosta f oletetaan, että toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $]0, 2[$ ja että $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ ja $f''(1) = 4$. Muodosta funktiolle f Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$ ja selvitä sen ja siihen liittyvän Taylorin kaavan avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Tarkka perustelu!

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

9. 8. 2006

1. Tutkitaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota f , jolle pätee $f(1) = 0$ ja $f(x) = 2006$ kun $x \neq 1$. Anna esimerkki välin $[0, 2]$ jaosta D , jolle pätee $S_D - s_D < 7^{-10}$. Perustelu!

2. Laske

$$f(x) = \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 2x}.$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3 + \sin^4 x}{5} \right)^k?$$

Tarkka perustelu. Riippuuko vastaus luvusta x ?

4. Tarkastellaan funktioita $f_n : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, missä

$$f_n(x) = \frac{x^7}{n}.$$

Suppeneeko jono pisteittäin? Onko suppeneminen tasaista? Tarkka perustelu.

5. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3}.$$

Tässä auttaa sopiva funktion $\sin t$ Taylorin kehitelmä kohdassa $t = 0$. Tarkka perustelu!

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

16. 11. 2006

1. Osoita Riemann-integraalin määritelmän perusteella, että funktio $f(x) = |x - 1|$ on Riemann-integroituva välillä $[0, 2]$.

2. Laske

$$f(x) = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

3. Suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}?$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa $1 + x \leq e^x$ kurssin lauseiden ja keskeisten esimerkkien lisäksi. Tarkka perustelu!

4. Oletetaan, että $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu. Tarkastellaan funktioita $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, missä

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}g(x^n).$$

Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$.

5. Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$ ja selvitä sen avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - e^{x-1}}{(x-1)^2}.$$

Tarkka perustelu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

6. 3. 2007

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita Riemann-integraalin määritelmän perusteella, että funktio $f(x) = |3x - 2|$ on Riemann-integroituva välillä $[0, 1]$.

2. Laske

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx.$$

Osittaisintegrointi auttaa...

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}?$$

Tarkka perustelu!

4. Osoita, että sarja $\sum x^k$ ei suppene tasaisesti välillä $]0, 1[$.

5. Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$ ja selvitä sen ja kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e x}{(x-1)^2}.$$

Tarkka perustelu.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

22. 5. 2007

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan funktiota $[0, 1]$, jolle $f(x) = |3x - 2|$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Laske

$$\int_1^e x^2 \ln(x^2) dx.$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k - \ln k}?$$

4. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva. Määritellään jokaisella $n = 1, 2, 3, \dots$ funktio f_n yhtälöllä $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 4)$.
(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4\sqrt{x} - (x + 4)}{(x - 4)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Loppukoe

14. 6. 2007

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan välillä $[0, 1]$ funktiota $f(x) = x^2$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Laske

$$\int_0^1 (e^x)^2 dx.$$

3. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 - 1}?$$

4. Määritellään jokaisella $n = 1, 2, 3, \dots$ funktio $f_n : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ yhtälöllä $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$. Osoita, että jono (f_n) suppenee tasaisesti.

5. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt{x}$ Taylorin polynomi $T_2(x; 4)$.
(b) Selvitä (a)-kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4\sqrt{x} - (x+4)}{(x-4)^2}.$$