

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II, 2008

2. kurssikoe

8. 5. 2008

MUISTA VASTATA KURSSIKYSELYYN

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1 Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k^2 + 5}?$$

2 Tarkastellaan funktioita $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{nx},$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

3 Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} (x-7)^k$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

4 Selvitä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin x - 1}{\sin^2 x}$$

käyttämällä funktion e^t sopivaa Taylorin polynomia, jossa $x_0 = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II, 2008

2. kurssikoe

13. 5. 2008 klo 12 - 14

TÄMÄ ON KURSSIKOE EIKÄ KELPAA KOKO KURSSIN SUORITAMISEEN LOPPUKOKEELELLA

MUISTA VASTATA KURSSIKYSELYYN

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{5k^2 + 3}?$$

2 Tarkastellaan funktioita $f_n :]\frac{1}{3}, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, jotka on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{nx},$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$. Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin? Suppeneeko se tasaisesti?

3 Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{k!}} (x - 42)^k$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

4 Muodosta funktiolle $f(x) = e^x$ Taylorin polynomi $T_2(x; 1)$. Selvitä sen avulla mikäli mahdollista

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^x - e(x^2 + 1)}{(x - 1)^2}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

2. kurssikoe 4.5.2009

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Perustele vastauksesi.

1 Suppeneeko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k}{3k^2 - 2}?$$

2 Suppeneeko funktiojono f_1, f_2, \dots tasaisesti koko reaalilukujen joukossa jos kaikilla n on

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(x^n)?$$

3 Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde on 7. Oletetaan, että kaikilla k on $|b_k| < |a_k|$ ja että sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ suppenemissäde on R . Osoita että $R \geq 7$.

4 (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \sin x + \cos x$ Taylorin polynomi $T_2(x; \frac{\pi}{4})$.

(b) Selvitä edellisen kohdan tuloksen avulla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(4x - \pi)^2}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}$$