

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

1. välikoe 4. 3. 2004

1. Laske

$$\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx.$$

(Tässä e^{x^2} tarkoittaa $e^{(x^2)}$.) Vihje: osittaisintegrointi auttaa.

2. Laske

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Sijoitus $x = \sin t$ auttaa. Kaavaa $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ saa käyttää.

3. Tarkastellaan funktiota $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ missä $f(x) = \ln x$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva. Vihje: kannattaa arvioida derivaatan itseisarvoa.

4. Oletetaan, että funktio $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva. Määritellään funktio $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ehdoilla $g(x) = f(x)$ kun $x \neq 2$ ja $g(2) = 2004$. Osoita, että g on Riemann-integroituva.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

1. välikoe 15. 3. 2004

1. Laske

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

Vihje: osittaisintegrointi auttaa.

2. Laske

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x \, dx.$$

Sijoitus $x = \sin t$ auttaa yhdessä osittaisintegroinnin kanssa. (Tässä tarkoitetaan arcussinin päähaaraa.)

3. Tarkastellaan funktiota $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ missä $f(x) = \sqrt{x}$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva.

4. Määritellään

$$F(x) = x + \int_1^{2+\sin x} e^t \, dt + \int_x^3 e^{2+\sin t} \cos t \, dt$$

ja oletetaan, että $F(0) = a$. Laske $F(1)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

1. välikoe

7. 3. 2005

1. Tutkitaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä funktiota f , jolle pätee $f(1) = 18$ ja $f(x) = 1$ kun $x \neq 1$. Anna esimerkki välin $[0, 2]$ jaosta D , jolle pätee $S_D - s_D < 2^{-10}$. Perustelu!

2. Laske

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx.$$

3. Määritellään kaikilla x , että

$$f(x) = \int_0^{e^x} \cos(e^t) dt$$

Selvitä, millä $x \in]-\infty, \ln(\ln \pi)]$ funktiolla f on lokaali ääriarvo kohdassa x .

4. Tarkastellaan aidosti kasvavaa funktiota $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $f(x) = \sin x - \cos x$ kaikilla x . Laske käänteisfunktion integraali

$$\int_0^{\pi/2} f^{-1}(y) dy$$

Voit esimerkiksi käyttää sijoitusta $y = f(x)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2

1. välikoe

10. 3. 2005

1. Tutkitaan välillä $[0, 2]$ määriteltyä rajoitettua funktiota f . Tarkastellaan välin $[0, 2]$ jakoja D_1 ja D_2 . Oletetaan, että $7 \leq S_{D_1} < 7 + 2^{-17}$ ja $7 - 2^{-17} \leq s_{D_2} < 7$. Anna esimerkki jaosta D , jolle $S_D - s_D < 2^{-16}$. Perustelu!

2. Laske

$$f(x) = \int_0^{\pi/3} \sin(\pi \cos x) \sin x \, dx.$$

3. Määritellään kaikilla x , että

$$f(x) = \int_a^{e^x} \sin t \, dt - \int_b^x \sin(e^t) e^t \, dt$$

Oletetaan, että $f(0) = 1$. Määritä $f(2005)$.

4. Oletetaan, että funktio f on kaikkialla jatkuvasti derivoituva (ts. derivaattafunktio on jatkuva.) Oletetaan, että $f(0) = 1 = f(1)$. Laske

$$\int_0^1 f(x) f'(x) e^{f(x)} \, dx.$$

Vihje: osittaisintegrointi.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

Kurssikoe

2.3.2006

1. Tarkastellaan funktiota $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 1$, kun $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2$, kun $1 < x < 2$ ja $f(x) = 3$, kun $2 \leq x \leq 3$. Anna esimerkki välin $[0, 3]$ jaosta D , jolle pätee $S_D - s_D < 2^{-100}$. Perustelu!

2. Laske

$$f(x) = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

3. Määritellään funktio $f :]\pi, 3\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \int_0^{\sin x} e^{\cos t} dt.$$

(a) Miksi f on derivoituva välillä $] \pi, 3\pi[$? Perustelu!

(b) Derivoi f .

4. Oletetaan, että $f :] - 1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja derivoituva, ja että f' on jatkuva koko välillä. Oletetaan lisäksi, että $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$. Osoita, että

$$\int_0^1 (f^{-1}(x) - xf'(x)) dx = 0.$$

Tässä f^{-1} tarkoittaa käänteisfunktioita. Vihje: tehtävässä kannattaa ajatella kahden integraalin erotusta ja tehdä toiseen sijoitus $x = f(t)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi II

1. kurssikoe

6. 3. 2007

HUOM: TÄMÄ ON KURSSIKOE. NÄMÄ TEHTÄVÄT EIVÄT KEL-
PAA KURSSIN SUORITTAMISEEN LOPPUKOKEEILLA!

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Tarkastellaan funktiota $[0, 1]$, jolle $f(x) = |3x - 2|$. Anna esimerkki
jaosta D , jolle $S_D - s_D < 10^{-200}$.

2. Laske

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x e^{\sin^2 x} dx.$$

3. Laske

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx.$$

Osittaisintegrointi auttaa...

4. Suppeneeko

$$\int_1^3 \frac{1 + \sqrt{3-x}}{3-x} dx?$$