MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
25. 1. 2007

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Oletetaan, että $|x-7|<3$ ja $|2x-3|<9$. Osoita, että $|x-5|<1$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja.)

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+3)(4x^2-5)}{6x^3+7}.$$

Tarkka perustelu!

3. Oletetaan, että $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$ ja $\lim_{x\to 1+} g(x)=\infty$. Osoita, että $\lim_{x\to 1+}(f(x)+g(x))=\infty$.

4. Oletetan, että $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0)=0$ ja $f'(0)=1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h>0$, että kaikilla $x\in]-h,0[$ pätee $(1+7^{-7})x<f(x)<(1-7^{-7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään.)

5. Oletetaan, että funktio $f:]x_0-h,x_0+h[\to\mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]x_0-h,x_0+h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0-h,x_0[$ ja $]x_0,x_0+h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x\to x_0-} f'(x)=\lim_{x\to x_0+} f'(x)=A\in\mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0)=A$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
9. 8. 2007

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Oletetaan, että $|x-7|<3$ ja $|2x-3|<9$. Osoita, että $|x-5|<1$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja.)

2. Selvitä lukujonon raja-arvoa koskevien lauseden avulla

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(3k^2-1)}{4k^3+3}.$$

Tarkka perustelu!

3. Todista funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}.$$

4. Oletetan, että $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0)=0$ ja $f'(0)=1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h>0$, että kaikilla x pätee: jos $0<x<h$, niin $(1-\frac{1}{7})x<f(x)<(1+\frac{1}{7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään.)

5. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[0,1]$ ja derivoituvia välillä $]0,1[$. Oletetaan lisäksi, että $g(0)=1$, $f(0)=2$, ja että kaikilla $x\in]0,1[$ pätee $g'(x)\geq 3$ ja $f'(x)g(x)\geq f(x)g'(x)$. Osoita, että $f(1)\geq 8$. (Väliarvolauseesta ja funktioiden suhteesta on hyötyä.)

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
14.11.2007

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Oletetaan, että $|x-7| < 3$ ja $|2x-3| < 9$. Osoita, että $|x-5| < 1$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja.)

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{(2x+3)(4x^2-5)}{6x^3+7}.$$

Tarkka perustelu!

3. Oletetaan, että $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$ ja $\lim_{x\to 1+} g(x) = \infty$. Osoita, että $\lim_{x\to 1+}(f(x)+g(x)) = \infty$.

4. Oletetan, että $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla $x \in]-h, 0[$ pätee $(1+7^{-7})x < f(x) < (1-7^{-7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]x_0-h, x_0+h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]x_0-h, x_0+h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0-h, x_0[$ ja $]x_0, x_0+h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x\to x_0-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
19. 12. 2007

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Oletetaan, että $|x - 7| < 3$ ja $|2x - 3| < 9$. Osoita, että $|x - 5| < 1$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja.)

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{(2x + 3)(4x^2 - 5)}{6x^3 + 7}.$$

Tarkka perustelu!

3. Oletetaan, että $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$ ja $\lim_{x \to 1+} g(x) = \infty$. Osoita, että $\lim_{x \to 1+}(f(x) + g(x)) = \infty$.

4. Oletetan, että $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla $x \in]-h, 0[$ pätee $(1 + 7^{-7})x < f(x) < (1 - 7^{-7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
24. 1. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Oletetaan, että $|a-e| < 7^{-100}$ ja $|b-\pi| < 7^{-100}$. Osoita, että $|ab-e\pi| < 7^{-99}$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja sekä tietoja $e < 3$ ja $\pi < 4$.)

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x^2-5x+7)}{11x^3+13}.$$

Tarkka perustelu!

3. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että $f'(1) = -4$, jos kaikilla $x < 2$ pätee

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}.$$

4. Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita

$$e^{-|x|} \cos x$$

saa reaaliluujen joukossa on suurin. (Tehtävässä saa käyttää kaikkia kosinin ja eksponenttifunktion tuttuja ominaisuuksia.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]0,3[\to \mathbb{R}$ on derivoituva koko määrittelyvälillään. Oletetaan, että $f'(1) = -5$ ja $f'(2) = 5$. Osoita, että on olemassa $t \in]1,2[$, jolle $f'(t) = 1$. Vihje: kannattaa tutkia apufunktiota $g(x) = f(x) - x$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
3. 4. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että kaikilla $a \neq 0$ pätee

$$0 \leq 1 + \frac{a}{|a|} \leq 2.$$

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)(2x^2-3)}{(1-x)(3x^3-4)}.$$

Tarkka perustelu!

3. Todista funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella tarkasti, että yhtälöllä $f(x) = \sqrt{2x+3}$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x = 5$. (Neliöjuurifunktion jatkuvuuteen ei siis saa vedota.)

4. Oletetan, että funktio f on derivoituva kohdassa x_0. Osoita, että f on jatkuva kohdassa x_0. (Kurssilla on lause, jonka mukaan tehtävän väite pätee. Tähän lauseeseen ei saa vedota, vaan tehtävässä on tarkoitus todistaa ko. lause.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $]-1, 1[$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x\to 0-} f'(x)$ ja $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ ovat olemassa. Osoita, että $f'(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
13. 5. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että kaikilla $a < b$ on olemassa $M > 0$, jolle $|x| < M$ kaikilla $x \in]a, b[$.

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2)(5x^2 - 4)}{(7 - x)(x^3 + 1)}.$$

Tarkka perustelu!

3. Todista funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella tarkasti, että yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x + 5}$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x = 3$. (Neliöjuurifunktion jatkuvuuteen ei siis saa vedota.)

4. Oletetan, että funktio f on derivoituva kohdassa x_0. Osoita, että f on jatkuva kohdassa x_0. (Kurssilla on lause, jonka mukaan tehtävän väite pätee. Tähän lauseeseen ei saa vedota, vaan tehtävässä on tarkoitus todistaa ko. lause.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $]-1, 1[$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x \to 0-} f'(x)$ ja $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ ovat olemassa. Osoita, että $f'(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
12. 6. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että kaikilla $a < b$ on olemassa $M > 0$, jolle pätee $|x| < M$ kaikilla välin $]a, b[$ alkioilla x.

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2)(x^2+4)}{(3-x)(2x^3+7)}.$$

Tarkka perustelu!

3. Todista funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella tarkasti, että yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x+1}$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$. (Neliöjuurifunktion jatkuvuuteen ei siis saa vedota.)

4. Oletetaan, että funktio f on derivoituva kohdassa x_0. Osoita, että f on jatkuva kohdassa x_0. (Kurssilla on lause, jonka mukaan tehtävän väite pätee. Tähän lauseeseen ei saa vedota, vaan tehtävässä on tarkoitus todistaa ko. lause.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $]-1, 1[$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x\to 0-} f'(x)$ ja $\lim_{x\to 0+} f'(x)$ ovat olemassa. Osoita, että $f'(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
14. 8. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Oletetaan, että $|x-7|<2$. Osoita, että $|x^2-50|<20$.
(Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää sekä suuruusjärjestystä ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja.)

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+3)(4x^2-5)}{6x^3+7}.$$

Tarkka perustelu!

3. Oletetaan, että $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$. Osoita, että $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x))=\infty$. Kurssilla ei ole lausetta, josta tulos seuraisi, vaan joudut työskentelmään määritelmien pohjalta.

4. Oletetan, että $f :]-1,1[\to\mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0)=0$ ja $f'(0)=1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h>0$, että kaikilla $x\in]-h,0[$ pätee $(1+7^{-7})x<f(x)<(1-7^{-7})x$. (Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]x_0-h,x_0+h[\to\mathbb{R}$ on jatkuva välillä $]x_0-h,x_0+h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0-h,x_0[$ ja $]x_0,x_0+h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x\to x_0-} f'(x)=\lim_{x\to x_0+} f'(x)=A\in\mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0)=A$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
21. 10. 2008

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a pätee $|a| - 2 \leq |a + 2|$.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko lukujono, joka määritellään ehdoilla $x_1 = 1$ ja

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{(n^2)}}$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ Perustelu!

3. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x^2 + 4)}{(3 - x^3)(x + 7)}.$$

Tarkka perustelu!

4. Todista funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien perusteella tarkasti, että yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x + 1}$ määritelty funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$. (Neliöjuurifunktion derivoituvuuteen tai jatkuvuuteen ei siis saa vedota. Funktioiden "raja-arvosääntöihin" ei myöskään saa vedota.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $]-1, 1[$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x \to 0-} f'(x)$ ja $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ ovat olemassa. Osoita, että $f'(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
22. 1. 2009

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

Tehtävissä 4 ja 5 saa käyttää koulusta tuttuja tietoja trigonometrisista funktioista ja eksponenttifunktiosta.

1. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a pätee $|a| \leq |a-3| + 3$.

2. Suppeneeko vai hajaantuuko nousevalukujono (x_n), joka toteuttaa ehdon

$$x_n - \frac{1}{n} \leq 2$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Perustelu!

3. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x^2+1)}{(1-x^3)(x+1)}.$$

Tarkka perustelu!

4. Osoita, että on olemassa $x > 0$, jolle

$$\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}e^x)}{x^2+1} = \frac{1}{10^{100}}.$$

5. Pitääkö kaikilla $x > 0$ paikkansa epäyhtälö $e^x > 1 + \sin x$? Todista väitteesi!

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Loppukoe
2. 4. 2009

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Oletetaan, että $|x-1| \leq 2$. Osoita, että $|x^2-1| \leq 8$.
(Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää sekä suuruusjärjestystä ja itseisarvoa koskevia kurssin tietoja.)

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 2} \frac{(2x+3)(4x^2-5)}{6x^3+7}.$$

Tarkka perustelu!

3. Oletetaan, että $\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Osoita, että $\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \infty$. Kurssilla ei ole lausetta, josta tulos seuraisi, vaan joudut työskentelemään määritelmien pohjalta.

4. Oletetaan, että $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 1$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla $x \in]0,h[$ pätee

$$(1-17^{-17})x < f(x) < (1+17^{-17})x.$$

(Kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määritelmää erotusosamäärään.)

5. Oletetaan, että funktio $f :]-3,7[\to \mathbb{R}$ on derivoituva. Oletetaan, että $f'(-2) = 1$ ja $f'(4) = 6$. Osoita, että on olemassa $a \in]-2,4[$, jolle $f'(a) = 5$. Vihje: kannataa tutkia apufunktiota $g(x) = f(x) - 5x$. Varoitus: tehtävässä EI ole oletettu, että f' on jatkuva.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Erillistentti ("Loppukoe") 11. 6. 2009

1. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

3. Osoita, että on olemassa $x > 0$, jolle $e^x = 2 - x^2$.

4. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sin(\sin x)$. Osoita, että $f(x) \leq x$ kaikilla $x > 0$.

5. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, $f'(-1) < 0$ ja $f'(1) > 0$. Osoita, että on olemassa $x \in]-1, 1[$ jolle $f'(x) = 0$. (Huom. Ei ole tietoa, että derivaattafunktio olisi jatkuva.)