MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1
2. välikoe
13. 12. 2004

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+1} = 1.$$

2. Tarkastellaan funktiota $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln \sqrt{1+\sin^2 x}.$$

(a) Derivoi funktio f.
(b) Millä x funktiolla f on lokaali maksimi kohdassa x?

3. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{e^{\sin x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Osoitettava, että f saavuttaa suurimman arvonsa, eli että on olemassa a, jolle kaikilla x pätee $f(x) \le f(a)$. Tehtävässä saa käyttää kaikkia koulussa opittuja sinin ja eksponenttifunktion ominaisuuksia kuten tietoa, että $e^y \to \infty$ kun $y \to \infty$. (*Huom:* tehtävä ei liity derivaattoihin.)

4. Oletetaan, että $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja lisäksi $f'(x)$ ja $g'(x)$ ovat olemassa kaikilla $x \in]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) > g(0)$ ja kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $f'(x) \ge g'(x)$. Osoita, että $f(1) > g(1)$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1
2. välikoe
15. 12. 2004

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 1} 2x^3 - x = 1.$$

2. Tarkastellaan funktiota $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{\ln(1+\sin^2 x)}.$$

(a) Derivoi funktio f. (b) Millä x funktiolla f on lokaali maksimi kohdassa x?

3. Tarkastellaan funktiota $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\cos(e^{x+1})}{\ln(x+2)}.$$

Osoitettava, että f saavuttaa pienimmän arvonsa, eli että on olemassa a, jolle kaikilla x pätee $f(x) \geq f(a)$. Tehtävässä saa käyttää kaikkia koulussa opittuja kosinin ja logaritmifunktion ominaisuuksia kuten tietoa, että $\ln(y) \to \infty$ kun $y \to \infty$. (Huom: tehtävä ei liity derivaattoihin.)

4. Oletetaan, että $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja lisäksi $f'(x)$ ja $g'(x)$ ovat olemassa kaikilla $x \in]0,1[$. Oletetaan, että $f(0) > 2g(0) > 0$ ja kaikilla $x \in]0,1[$ pätee $g(x) > 0$ ja $f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x)$. Osoita, että $f(1) > 2g(1)$. Vihje: kannattaa tutkia funktioiden suhdetta.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2
2. välikoe
Elokuu 2005
TÄMÄ ON VÄLIKOE JA SIKSI LASKUAIKAA ON VAIN LAITOSTENTIN KAKSI ENSIMMÄISTÄ TUNTIA. MYÖHEMMIN JÄTETTYJÄ SUORITUKSIA EI VOIDA OTTAA VASTAAN.

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Laske
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$

2. Suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7+\sin^2 x}{9}\right)^k?$$

Tarkka perustelu.

3.Tarkastellaan funktioita $f_n : [-1,3] \to \mathbb{R}$, missä $f_n(x) = \frac{x^3}{n}$. Suppeneeko jono pisteittäin? Onko suppeneminen tasaista?

4. Selvitä raja-arvo
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - \sin x}{x^3}.$$

Tässä auttaa sopiva funktion $\sin t$ Taylorin kehitelmä kohdassa $t = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
2. kurssikoe
15.12.2005

Kokeessa saa käyttää koulusta tuttujen funktioiden tuttuja ominaisuuksia ellei tehtävässä muuta sanota.

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+2}=\frac{1}{5}.$$

2. Osoita, että on olemassa $x>0$, jolle pätee $\cos x=\sqrt{x}$.

3. Tarkastellaan funktiota $f\colon]0,\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{\ln(1+\cos^2 x)}.$$

   Osoita, että funktio on aidosti vähenevä välillä $]0,\frac{\pi}{2}[$.

4. Oletetaan, että $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $]0,1[$. Oletetaan lisäksi, että $f(0)=0$ ja $f(1)=1$. Osoita, että on olemassa $c\in]0,1[$, jolla $f'(c)=2c$. Vihje: tutki erotusta $f(x)-x^2$.

MUISTA VASTATA KURSSIKYSELYYN!

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
2. Kurssikoe 2006
14. 12. 2006

1. Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^{2007}+2\sin x)(x+\sin x)}{x^2}$$

Tehtävässä saa lisäksi käyttää sinifunktion jatkuvuutta sekä tietoa, että $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ yhtälön $f(x) = x^2|x|$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa $x = 0$.

3. Osoita, että kaikilla $x > 0$ pätee $\ln(x+1) \geq x - \frac{1}{2}x^2$. Vihje: tutki erotusfunktion derivaattaa.

4. Oletetaan, että kaikkialla derivoituva funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Osoita, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$ jolle $f'(c) = 0$.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
2. kurssikoe

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

2. Osoita, että on olemassa $x > 0$, jolle $e^x = 2 - x^2$.

3. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sin(\sin x)$. Osoita, että $f(x) \leq x$ kaikilla $x > 0$.

4. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ ja $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$. Osoita, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = 0$.