

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1

1. välikoe

21. 10. 2004

1. Oletetaan, että $|x - 2| < 1$. Osoita, että $|x - 1| < 2$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia lauseita.)

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = 1.$$

3. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)(3n + 1)(4n + 1)}{n^3 + 3}.$$

Perustelu! (Tehtävässä saa käyttää luentojen ja monisteen lauseita lukujonojen raja-arvoista.)

4. Oletetaan, että jono (x_k) on nouseva ja jono (y_k) on laskeva, ja että kaikilla $k = 1, 2, \dots$ pätee $x_k \leq y_k \leq x_k + \frac{1}{k}$. Osoita, että molemmat jonot suppenevat ja että niillä on sama raja-arvo.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1

1. välikoe

1. 11. 2004

1. Oletetaan, että $|x - 1| < 5^{-33}$ ja että $|y - 2| < 5^{-33}$. Osoita, että $|4x + y - 8| < 5^{-32}$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia lauseita.)

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{4 - \frac{1}{k}} = 2.$$

3. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 1)(3n + 2)(2n + 3)}{n^3 + 4}.$$

Perustelu! (Tehtävässä saa käyttää luentojen ja monisteen lauseita lukujonojen raja-arvoista.)

4. Oletetaan, että jono (x_k) toteuttaa ehdot (a) jono (x_{2k}) suppenee ja (b) kaikilla k pätee $|x_k - x_{k+1}| < \frac{1}{k}$. Osoita, että jono (x_k) suppenee.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1

1. välikoe

8. 11. 2004

1. Oletetaan, että $|x - 1| < 5^{-33}$ ja että $|y - 2| < 5^{-33}$. Osoita, että $|4x + y - 6| < 5^{-32}$. (Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja itseisarvoa koskevia lauseita.)

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{4 - \frac{1}{k}} = 2.$$

3. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 1)(3n + 2)(2n + 3)}{n^3 + 4}.$$

Perustelu! (Tehtävässä saa käyttää luentojen ja monisteen lauseita lukujonon raja-arvoista.)

4. Oletetaan, että jono (x_k) toteuttaa ehdot (a) jono (x_{2k}) suppenee ja (b) kaikilla k pätee $|x_k - x_{k+1}| < \frac{1}{k}$. Osoita, että jono (x_k) suppenee.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

1. Kurssikoe

20.10.2005

1. Oletetaan, että $|x - 1| < 4$ ja $|x - 5| < 3$. Osoita, että $|x - 4| < 2$. Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja luennoilla todistettuja itseisarvon ominaisuuksia.

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 1} = 2.$$

3. Määritä kurssin raja-arvoja koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n^2 + 1} + \frac{2n + 1}{n + 1} \right).$$

Perustele väitteesi!

4. Osoita, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ pätee

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Tätä yhtälöä kannattaa käyttää tapauksessa $a = \sqrt[n]{2}$ ja $b = 1$. Lisäksi saa pitää tunnettuna, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ pätee $1 < \sqrt[n]{2} < 2$. (Tehtävässä ei siis vaadita induktiotodistuksia.) Eksponenttifunktion jatkuvuuteen ei saa vedota.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

1. kurssikoe

26. 10. 2005

1. Oletetaan, että $|x - 2| < 2^{-10}$. Osoita, että

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < 2^{-11}.$$

Tehtävässä saa käyttää itseisarvon määritelmää ja luennoilla todistettuja itseisarvon ominaisuuksia.

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

3. Määritä kurssin raja-arvoja koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 2n + 1} \right).$$

Perustele väitteesi!

4. Oletetaan, että A ja B ovat epätyhjiä ylhäältä rajoitettuja reaalilukujoukkoja. Merkitään $a = \sup A$ ja $b = \sup B$. Osoita, että

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

1. Kurssikoe

19. 10. 2006

1. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n + 3}{(n + 4)(n^2 + 5)}.$$

Perustelu! Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita sekä tietoa, että $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.

2. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4n}{1 + 6n} = \frac{2}{3}.$$

3. Oletetaan, että $x_1 = 1$ ja että $x_{n+1} = \frac{1}{2}(2 + x_n)$ kaikilla n . Osoita, että jono (x_n) suppenee ja määritä jonon raja-arvo.

4. Oletetaan, että funktio $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $|g(x)| < 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = (x - 7)g(x^7), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 0.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

1. Kurssikoe ("korvaava koe")

24. 10. 2006

TÄMÄ ON KURSSIKOE ("VÄLIKOE") JA LASKUAIKAA ON SIKSI VAIN 2 TUNTIA

TÄMÄ TEHTÄVÄSARJA EI OLE LOPPUKOE. PYYDÄ TARVITTAESSA UUDET TEHTÄVÄT

1. Oletetaan, että $x_n > 0$ ja $y_n > 0$ kaikilla n . Oletetaan, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 7$. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7x_n - 3y_n}{x_n^{2006}}.$$

Perustelu! Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita.

2. Todista lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = 4.$$

3. Oletetaan, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$. Osoita, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$. (Huom: kurssilla ei ole lausetta, josta tulos seuraisi suoraan. On käytettävä määritelmiä.)

4. Oletetaan, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]6, 8[$ ja että $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 4$. Osoita, että $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{f(x)} = 2$. Neliöjuuren jatkuvuuteen ei saa vedota.