INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.1
Mellanförhör 1
21. 10. 2004

1. Antag att $|x-2| < 1$. Visa att $|x-1| < 2$. (Man får använda sig av absolutbeloppets definition och absolutbeloppssatser.)

2. Visa med hjälp av definitionen för en talföljds gränsvärde att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2-1}{k^2+1} = 1.$$

3. Utred

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n+1)(4n+1)}{n^3+3}.$$

Motivering! (Man får använda sig av gränsvärdessatserna från föreläsningarna och kompendiet.)

4. Antag att talföljden (x_k) är växande, och att (y_k) är avtagande. Antag också att det för alla $k = 1, 2, \ldots$ gäller att $x_k \leq y_k \leq x_k + \frac{1}{k}$. Visa att bägge talföljder konvergerar, och dessutom har samma gränsvärde.

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
Calculus I.1
Mid-term examination 1
21. 10. 2004

1. Suppose that $|x-2| < 1$. Show that $|x-1| < 2$. (You may use the definition of the absolute value and theorems regarding absolute values.)

2. Using the definition for the limit of a sequence, show that

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2-1}{k^2+1} = 1.$$

3. Find

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n+1)(4n+1)}{n^3+3}.$$

Explain! (You may use limit theorems presented on the lectures and in the lecture notes.)

4. Assume that (x_k) is an ascending sequence, (y_k) is a descending sequence, and that for all $k = 1, 2, \ldots$ the inequalities $x_k \leq y_k \leq x_k + \frac{1}{k}$ hold. Show that both sequences converge, and that they have the same limit.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.1
Mellanförhör 1
25. 10. 2004

1. Antag att $|x-1| < 5^{-33}$ och att $|y-2| < 5^{-33}$. Visa att $|2x+3y-8| < 5^{-32}$. (Man kan använda sig av absolutbeloppets definition och absolutbeloppssatser.)

2. Visa att

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{k}} = 2$$

genom att använda definitionen för en talföljds gränsvärde.

3. Utred

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+4}.$$

Motivera noggrannt! (Man får använda sig av gränsvärdessatserna från föreläsningarna och kompendiet.)

4. Antag att talföljden (x_k) är växande, och att (x_{2k}) konvergerar. Visa att följden (x_k) konvergerar.

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
Calculus I.1
Mid-term examination 1
25. 10. 2004

1. Assume that $|x-1| < 5^{-33}$ and that $|y-2| < 5^{-33}$. Show that $|2x+3y-8| < 5^{-32}$. (You may use the definition of the absolute value and theorems regarding absolute values.)

2. Using the definition for the limit of a sequence, show that

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{k}} = 2.$$

3. Find

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+4}.$$

Why is your assertion true? (You may use limit theorems presented on the lectures and in the lecture notes.)

4. Assume that (x_k) is an ascending sequence, and that (x_{2k}) is convergent. Show that also (x_k) converges.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
Analysis I
Examination 1
Oct 20, 2005

1. Suppose that $|x-1| < 4$ and $|x-5| < 3$. Show that $|x-4| < 2$. The definition of the absolute value and properties about absolute values proved on the lectures may be used in the problem.

2. Show using the definition of a limit of a sequence that
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

3. Determine
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n^2+1} + \frac{2n+1}{n+1}\right)$$
using the results about limits from the course. Justify your claim!

4. Show that
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$
The fact that $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$ may be used in the problem. This equation is useful in the case $a = \sqrt[n]{2}$ and $b = 1$. Also it can be taken for granted that $1 < \sqrt[n]{2} < 2$ for all $n = 1, 2, 3, \ldots$. (So no induction arguments are required in the problem.) One may not rely on the continuity of the exponential function.