INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Slutförhör
20. 5. 2008

Lämna rum för poängantalen ovan på första sidan.

Uppgifterna är grupperade enligt ämnesområde.

1. Betrakta den funktion som är definierad i intervallet $[0, 2]$, för vilken $f(x) = x^2 - x$. Ge exempel på en delning D, för vilken $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Bevisa att

$$\int_0^1 e^{x^3} dx \leq e - 1.$$

Obs. Det är INTE MÖJLIGT att exakt beräkna ovanstående integral. Det faktum att $x^3 \leq x$ för alla $x \in [0, 1]$ hjälper.

3. Konvergerar eller divergerar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5k^3 + 2} \ ?$$

4. Betrakta funktionerna $f_n :]0, 1[\to \mathbb{R}$, som är definierade av villkoret

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln x,$$

där $n = 1, 2, 3, \ldots$ Konvergerar följden (f_n) punktvis ? Konvergerar den likformigt ?

5. Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\cos x - 1) - 1}{(\cos x - 1)^2}$$

genom att använda ett lämpligt Taylor polynom till funktionen $\cos t$, med $x_0 = 0$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Slutprov
12. 11. 2008

Lämna utrymme på den första sidans övre marginal för anteckning av poäng.

Uppgifterna är ordnade enligt ämne.

1. Vi betraktar den i intervallet $[0, 2]$ definierade funktionen för vilken $f(1) = 2008$ och $f(x) = -2008$ när $x \neq 1$. Ge ett exempel på en delning D för vilken $S_D - s_D < 10^{-100}$.

2. Beräkna
$$\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - 4}\, dx.$$

3. Konvergerar eller divergerar
$$\int_1^\infty \frac{x^2}{2^x}\, dx?$$

4. Vi definierar funktionerna $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ med villkoret
$$f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2.$$
Konvergerar följden (f_n) likformigt?

5. (a) Bilda Taylorpolynomet $\mathrm{T}_2(x; 1)$ till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$.
(b) Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x} - (x + 1)}{(x - 1)^2}.$$
med hjälp av resultatet i (a)-delen

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II

Tent ("slutprov") 19.5. 2009

Uppgifterna är ordnade ämnesvis.

1. Beräkna

$$\int_0^1 e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}\, dx.$$

2. Konvergerar

$$\int_1^\infty \frac{2x}{3x^3+5}\, dx?$$

3. Konvergerar funktionsföljden $f_1, f_2, \ldots$ likformigt i intervallet $[-1, 1]$ om vi för varje n har

$$f_n(x) = \frac{x^{3n}}{5n}?$$

4. Vi antar att potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien 7. Vi antar att $|b_k| > |a_k|$ för varje k och att serien $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ har konvergensradien R. Visa att $R \leq 7$.

5. (a) Bilda Taylorpolynomet $\mathrm{T}_2(x; \frac{\pi}{4})$ för funktionen $f(x) = \sin x + \cos x$.

(b) Beräkna med hjälp av resultatet ovan

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(4x-\pi)^2}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}.$$