INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.2
Mellanförhör 1
4. 3. 2004

1. Beräkna
$$\int_0^1 x^2\, e^x\, dx.$$
Tips: partiell integrering två gånger.

2. Beräkna
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$
Substitutionen $x = \sin t$ hjälper. Formeln $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ kan användas.

3. Vi betraktar funktionen $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ var $f(x) = \ln x$. Visa att f är likformigt kontinuerlig. *Tips:* det lönar sig att estimera derivatans absolutbelopp.

4. Antag att funktionen $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ är Riemann-integrerbar. Vi definierar funktionen $g : [1, 3] \to \mathbb{R}$ genom $g(x) = f(x)$ när $x \neq 2$ och $g(2) = 2004$. Visa, att g är Riemann-integrerbar.

***

1. Laske
$$\int_0^1 x^2\, e^x\, dx.$$
Vihje: kahdesti tehty osittaisintegrointi auttaa.

2. Laske
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$
Sijoitus $x = \sin t$ auttaa. Kaavaa $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ saa käyttää.

3. Tarkastellaan funktiota $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ missä $f(x) = \ln x$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva. *Vihje:* kannattaa arvioida derivaatan itseisarvoa.

4. Oletetaan, että funktio $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva. Määritellään funktio $g : [1, 3] \to \mathbb{R}$ ehdoilla $g(x) = f(x)$ kun $x \neq 2$ ja $g(2) = 2004$. Osoita, että g on Riemann-integroituva.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.2
Mellanförhör 1
7. 3. 2005

1. Vi undersöker den i intervallet $[0, 2]$ definierade funktionen f, för vilken $f(1) = 18$ och $f(x) = 1$ när $x \neq 1$. Ge ett exempel på en delning D av intervallet $[0, 2]$, för vilken det gäller att $S_D - s_D < 2^{-10}$. Motivering!

2. Beräkna
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx.$$

3. Vi definierar för alla x
$$f(x) = \int_0^{e^x} \cos(e^t)\, dt$$
I vilka $x \in] -\infty, \ln(\ln \pi)]$ har funktionen f lokala extrempunkter ?

4. Vi undersöker den strängt växande funktionen $f : [0, \pi/2] :\longrightarrow \mathbb{R}$, för vilken $f(x) = \sin x - \cos x$ för alla x. Beräkna den inversa funktionens integral
$$\int_0^{\pi/2} f^{-1}(y)\, dy$$
Du kan t.ex. använda substitutionen $y = f(x)$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.2
Mellanförhör 1
10. 3. 2005

1. Vi undersöker en begränsad funktion f definierad på intervallet $[0,2]$, samt delningarna D_1 och D_2 av intevallet $[0,2]$. Antag att $7 \leq S_{D_1} < 7 + 2^{-17}$ och $7 - 2^{-17} \leq s_{D_2} < 7$. Ge ett exempel på en delning D, för vilken $S_D - s_D < 2^{-16}$. Motivering!

2. Beräkna
$$f(x) = \int_0^{\pi/3} \sin(\pi \cos x) \sin x \, dx.$$

3. Låt för alla x
$$f(x) = \int_a^{e^x} \sin t \, dt - \int_b^x \sin(e^t) e^t \, dt$$
Antag dessutom att $f(0) = 1$. Bestäm $f(2005)$.

4. Antag att funktionen f är överallt kontinuerligt deriverbar (dvs. derivatafunktionen är kontinuerlig). Antag att $f(0) = 1 = f(1)$. Beräkna
$$\int_0^1 f(x) f'(x) e^{f(x)} \, dx.$$
Tips: partiell integrering.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
Kursförhör
2.3.2006

1. Vi undersöker funktionen $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ för vilken $f(x) = 1$ då $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2$ då $1 < x < 2$ och $f(x) = 3$ då $2 \leq x \leq 3$. Ge ett exempel på en sådan indelning (delning) D av intervallet $[0,3]$ att $S_D - s_D < 2^{-100}$. Motivera!

2. Beräkna
$$f(x) = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

3. Vi definierar funktionen $f :]\pi, 3\pi[\to \mathbb{R}$ med hjälp av villkoret
$$f(x) = \int_0^{\sin x} e^{\cos t}\, dt.$$
   (a) Varför är f deriverbar i intervallet $]\pi, 3\pi[$? Motivera!
   (b) Derivera f.

4. Antag att $f :]-1, 2[\to \mathbb{R}$ är strängt växande och deriverbar och att f' är kontinuerlig i hela intervallet. Antag dessutom att $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$. Visa att
$$\int_0^1 (f^{-1}(x) - xf'(x))\, dx = 0.$$
Här betecknar f^{-1} den inversa funktionen. Tips: det lönar sig att tänka på skillnaden mellan två integraler och göra substitutionen $x = f(t)$ i den ena.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys II
1. kursprovet
1. 3. 2007

Lämna också plats på den övre kanten av den första sidan av ditt svarspapper för poängantalet.

1. Betrakta funktionen $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, för vilken $f(x) = 1$, då $0 \leq x < 1$ och $f(x) = x$, då $1 \leq x \leq 2$. Ge ett exempel på en delning D av intervallet $[0,2]$ för vilken det gäller att $S_D - s_D < 10^{-100}$. Motivera!

2. Beräkna

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(\pi \sin x) \cos x \, dx.$$

3. Beräkna

$$\int_1^e x^2 \ln(x^2) \, dx.$$

Du kan exempelvis använda partiell integrering. Notera att det finns olika sätt att betrakta uppgiftens funktion som en produkt.

4. Konvergerar

$$\int_1^2 \frac{1+\sqrt{2-x}}{2-x} \, dx?$$