INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Slutförhör
3. 4. 2008

Uppgifterna är ordnade enligt ämnesområde.

Lämna rum för poängantalet på övre hörnet av första sidan.

1. Visa att för alla $a \neq 0$ gäller

$$0 \leq 1 + \frac{a}{|a|} \leq 2.$$

2. Bestäm

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)(2x^2-3)}{(1-x)(3x^3-4)}.$$

med hjälp av satserna som berör funktioners gränsvärde. Motivera noggrant!

3. Bevisa noggrant på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontiniutet av funktioner att funktionen som definieras av ekvationen $f(x) = \sqrt{2x+3}$ är kontinuerlig i punkten $x = 5$. (Man får inte använda kontinuiteten av rotfunktionen.)

4. Anta att funktionen f är deriverbar i punkten x_0. Bevisa att f är kontinuerlig i punkten x_0. (Till kursen hör en sats, som säger att påståendet gäller. Avsikten med uppgiften är att bevisa denna sats.)

5. Anta att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är deriverbar i intervallet $]-1, 1[$. Anta vidare att $\lim_{x \to 0-} f'(x)$ och $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ existerar. Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Slutförhör
21.10. 2008

Uppgifterna är ordnade enligt ämnesområde.

Lämna plats för poängtalet på den övre kanten av första sidan av ditt svarspapper.

1. Visa att för varje reellt tal a gäller att $|a| - 2 \leq |a + 2|$.

2. Konvergerar eller divergerar den talföljd som definieras genom villkoren $x_1 = 1$ och

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{(n^2)}}$$

då $n = 1, 2, 3, \ldots$? Motivera!

3. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x^2 + 4)}{(3 - x^3)(x + 7)}$$

med hjälp av de satser som berör gränsvärdet av funktioner. Motivera noggrant!

4. Bevisa noggrant utgående från definitionerna av gränsvärdet och derivatan av en funktion att den funktion som definieras av ekvationen $f(x) = \sqrt{x + 1}$ är kontinuerlig i punkten $x = 2$. (Man får inte hänvisa till differentierbarheten eller kontinuiteten av kvadratrotsfunktionen, eller till räknereglerna för gränsvärdet av funktioner.)

5. Anta att funktionen $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ är deriverbar i intervallet $]-1, 1[$. Anta dessutom att gränsvärdena $\lim_{x \to 0-} f'(x)$ och $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ existerar. Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Slutförhör 11. 6. 2009

1. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en talföljd att

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

2. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

3. Visa att det finns $x > 0$ för vilken $e^x = 2 - x^2$.

4. Betrakta funktionen $f(x) = \sin(\sin x)$. Visa att $f(x) \leq x$ gäller för varje $x > 0$.

5. Anta att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar, $f'(-1) < 0$ och $f'(1) > 0$. Visa att det finns $x \in\,]-1, 1[$ för vilken $f'(x) = 0$. (Obs. Man vet inte om derivatafunktionen är kontinuerlig.)