INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.1
Slutförhör
14. 4. 2005

1. Antag att $|x - \pi| < 7^{-100}$. Visa att

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\pi}\right| < 7^{-101}$$

.

2. Antag att A är mängden av de tal $1 + \frac{1}{n}$, var $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bestäm $\inf A$ och $\sup A$. Motivera!

3. Antag att $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$ och att $f(x) = (x-1)g(x)$ för alla $x \in]0, 2[$ (speciellt är alltså $g(x)$ definierad åtminstone i detta intervall.) Är funktionen f nödvändigtvis deriverbar i punkten 1? Motivera!

4. Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar överallt, samt att $f'(0) = 0$ och $f'(1) = 2$. Visa att det för alla $k \in]0, 2[$ finns ett $x \in]0, 1[$, för vilket $f'(x) = k$. *Tips:* undersök hjälpfunktionen $f(x) - kx$.

5. Antag att $f :]a - r, a + r[\to \mathbb{R}$ är deriverbar åtminstone i alla definitionsintervallets punkter som $\neq a$ och att gränsvärdet $\lim_{x \to a} f'(x)$ existerar. Visa att funktionen f är deriverbar också i a.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Slutförhör
26.1.2006

1. Antag att $|x - e| < 2^{-100}$ och $|x - \pi| < 2^{-100}$. Visa att $|(x + y) - (e + \pi)| < 2^{-99}$.

2. Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)(2n-2)(n-3)}{n^3}.$$
Motivering! (I lösningen får satser om talföljders gränsvärden från föreläsningarna eller kompendiet användas.)

3. Visa utgående från definitionen av gränsvärde av funktion och definitionen av derivata att $f'(1) = 2$ då $f(x) = x^2$ för alla x.

4. Vi undersöker funktionen $f\colon]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{\ln(1 + \sin x)}.$$
Bestäm derivatan av funktionen $f^{-1}(t)$ i punkten $t = \sqrt{\ln(\frac{3}{2})}$. (Observera att man inte behöver bestämma ett uttryck för den inversa funktionen. Att funktionen f är strängt växande behöver inte visas.)

5. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar överallt. Antag att $f(0) > 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och att $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Visa att det existerar ett a för vilket $f'(a) = 0$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Slutförhör
24. 10. 2006

1. Anta att $|x - 7| < 3$ och $|2x - 3| < 9$. Visa att $|x - 5| < 1$.
(I uppgiften får man använda definitionen av absolutbeloppet samt kursens fakta om absloutbeloppet.)

2. Bestäm

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k^2-1)}{k^3+3}.$$

med hjälp av lämpliga satser som berör gränsvärdet av en talföljd. Motivera noggrant!

3. Visa utgående från definitionen av gränsvärdet att

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{3}{5}.$$

4. Anta att $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ satisfierar villkoren $f(0) = 0$ och $f'(0) = 1$. Anta att $k > 0$. Bevisa att det existerar $h > 0$ så att för varje x gäller: om $0 < x < h$, så $(1-k)x < f(x) < (1+k)x$. (Det lönar sig att tillämpa definitionen av gränsvärdet för en funktion på differenskvoten.)

5. Anta att funktionerna f och g är kontinuerliga i intervallet $[0,1]$ och deriverbara i intervallet $]0,1[$. Anta dessutom att $g(0) = 1$, $f(0) = 2$, och att för alla $x \in]0,1[$ gäller $g'(x) \geq 3$ och $f'(x)g(x) \geq f(x)g'(x)$. Bevisa att $f(1) \geq 8$. (Man har nytta av medelvärdessatsen och kvoten av funktionerna.)