INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.1
Mellanförhör 2
13. 12. 2004

1. Visa genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde att

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+1} = 1.$$

2. Vi betraktar funktionen $f\colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln\sqrt{1+\sin^2 x}.$$

(a) Derivera funktionen f.
(b) I vilket/vilka x har funktionen f ett lokalt maximum?

3. Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^{\sin x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Visa att f uppnår sitt största värde, d v s att det existerar ett a, så att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $f(x) \leq f(a)$. Man får använda sig av alla sinus,- och exponentfunktionens egenskaper som behandlas i skolkursen, t.ex. av det faktum att $e^y \to \infty$ när $y \to \infty$. (*Obs:* uppgiften har inget med derivator att göra.)

4. Antag att $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ och $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga, samt att $f'(x)$ och $g'(x)$ existerar för alla $x \in]0,1[$. Antag dessutom att $f(0) > g(0)$ och att det för alla $x \in]0,1[$ gäller att $f'(x) \geq g'(x)$. Visa att $f(1) > g(1)$.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Kursförhör 2
21.12.2005

I lösningarna får man använda sig av från skolan bekanta egenskaper hos funktioner, om inte annat sägs i uppgiften.

1. Visa utgående från definitionen av gränsvärde av funktion att

$$\lim_{x \to 3} 2x^2 + 5x = 33.$$

2. Visa att det existerar ett $x > 0$ för vilket $\cos x = x^2$.

3. Vi undersöker den strängt växande funktionen $f\colon]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\ln(1 + \sin x)}.$$

Bestäm derivatan av funktionen $f^{-1}(t)$ i punkten $t = \sqrt{\ln(\frac{3}{2})}$. (Observera att man inte behöver bilda ett uttryck för den inversa funktionen. Man behöver inte visa att funktionen f är strängt växande.)

4. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar överallt. Antag att $f(0) > 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och att $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Visa att det existerar ett a för vilket $f'(a) = 0$.

KOM IHÅG ATT BESVARA KURSUTVÄRDERINGEN!

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
2. kursprovet 2006
14. 12. 2006

1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^{2007} + 2\sin x)(x + \sin x)}{x^2}$$

med hjälp av kursens satser. I uppgiften får man dessutom använda kontinuiteten av sinusfunktionen samt det faktum att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar ekvationen $f(x) = x^2|x|$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i punkten $x = 0$.

3. Visa att det för alla $x > 0$ gäller att $\ln(x + 1) \geq x - \frac{1}{2}x^2$. Tips: undersök derivatan av skillnaden mellan funktionerna.

4. Anta att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar överallt, samt satisfierar villkoren $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Bevisa att det finns $c \in \mathbb{R}$ för vilken $f'(c) = 0$.