INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.1
Mellanförhör 1
21. 10. 2004

1. Antag att $|x-2|<1$. Visa att $|x-1|<2$. (Man får använda sig av absolutbeloppets definition och absolutbeloppssatser.)

2. Visa med hjälp av definitionen för en talföljds gränsvärde att

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2-1}{k^2+1}=1.$$

3. Utred

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n+1)(4n+1)}{n^3+3}.$$

Motivering! (Man får använda sig av gränsvärdessatserna från föreläsningarna och kompendiet.)

4. Antag att talföljden (x_k) är växande, och att (y_k) är avtagande. Antag också att det för alla $k=1,2,\dots$ gäller att $x_k\le y_k\le x_k+\frac{1}{k}$. Visa att bägge talföljder konvergerar, och dessutom har samma gränsvärde.

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
Calculus I.1
Mid-term examination 1
21. 10. 2004

1. Suppose that $|x-2|<1$. Show that $|x-1|<2$. (You may use the definition of the absolute value and theorems regarding absolute values.)

2. Using the definition for the limit of a sequence, show that

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2-1}{k^2+1}=1.$$

3. Find

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n+1)(4n+1)}{n^3+3}.$$

Explain! (You may use limit theorems presented on the lectures and in the lecture notes.)

4. Assume that (x_k) is an ascending sequence, (y_k) is a descending sequence, and that for all $k=1,2,\dots$ the inequalities $x_k\le y_k\le x_k+\frac{1}{k}$ hold. Show that both sequences converge, and that they have the same limit.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Differential- och integralkalkyl I.1
Mellanförhör 1
25. 10. 2004

1. Antag att $|x-1| < 5^{-33}$ och att $|y-2| < 5^{-33}$. Visa att $|2x+3y-8| < 5^{-32}$. (Man kan använda sig av absolutbeloppets definition och absolutbeloppssatser.)

2. Visa att

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{k}} = 2$$

genom att använda definitionen för en talföljds gränsvärde.

3. Utred

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+4}.$$

Motivera noggrannt! (Man får använda sig av gränsvärdessatserna från föreläsningarna och kompendiet.)

4. Antag att talföljden (x_k) är växande, och att (x_{2k}) konvergerar. Visa att följden (x_k) konvergerar.

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
Calculus I.1
Mid-term examination 1
25. 10. 2004

1. Assume that $|x-1| < 5^{-33}$ and that $|y-2| < 5^{-33}$. Show that $|2x+3y-8| < 5^{-32}$. (You may use the definition of the absolute value and theorems regarding absolute values.)

2. Using the definition for the limit of a sequence, show that

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{k}} = 2.$$

3. Find

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+4}.$$

Why is your assertion true? (You may use limit theorems presented on the lectures and in the lecture notes.)

4. Assume that (x_k) is an ascending sequence, and that (x_{2k}) is convergent. Show that also (x_k) converges.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Kursförhör 1
20.10.2005

1. Antag att $|x-1|<4$ och $|x-5|<3$. Visa att $|x-4|<2$. I uppgiften får absolutbeloppets definition samt på föreläsningarna bevisade egenskaper hos absolutbelopp användas.

2. Visa utgående från definitionen av gränsvärde av en talföljd att
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2.$$

3. Bestäm
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n^2+1}+\frac{2n+1}{n+1}\right)$$
med hjälp av kursens satser om gränsvärden. Motivera ditt påstående!

4. Visa att
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1.$$
I uppgiften får man använda sig av att $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ för alla $n=1,2,3,\ldots$. Det lönar sig att använda denna ekvation i fallet $a=\sqrt[n]{2}$ och $b=1$. Dessutom får man anta det vara känt att $1<\sqrt[n]{2}<2$ för alla $n=1,2,3,\ldots$. (Inga induktionsbevis krävs alltså i uppgiften.) Man får inte stöda sig på exponentialfunktionens kontinuitet.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Kursförhör 1
26. 10. 2005

1. Antag att $|x-2| < 2^{-10}$. Visa att

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < 2^{-11}.$$

   Man får använda sig av absolutbeloppets definition och av de absolutbeloppets egenskaper som bevisats på föreläsningarna.

2. Visa med hjälp av definitionen för en talföljds gränsvärde att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

3. Bestäm med hjälp av kursens gränsvärdessatser gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{3n^2+2n+1}.$$

   Motivera ditt svar!

4. Antag att A och B är icke-tomma uppifrån begränsade mängder av reella tal. Beteckna $a = \sup A$ och $b = \sup B$. Visa att

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ och } y \in B\}.$$

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
1. kursprovet
19. 10. 2006

1. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+3}{(n+4)(n^2+5)}.$$

Motivera! I uppgiften får man använda kursens satser, samt det faktum att $\frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$.

2. Visa med hjälp av definitionen för gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+4n}{1+6n} = \frac{2}{3}.$$

3. Anta att $x_1 = 1$ och att $x_{n+1} = \frac{1}{2}(2+x_n)$ för alla n. Visa att följden (x_n) konvergerar, och bestäm följdens gränsvärde.

4. Anta att funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar villkoret $|g(x)| < 3$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Definiera funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom villkoret

$$f(x) = (x-7)g(x^7), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Visa att

$$\lim_{x\to 7} f(x) = 0.$$