Algebra II

Loppukoe 9.8.2007

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa.)

1. Näytä, että joukon $\{1, 2, 3\}$ symmetrinen ryhmä on ratkeava.

2. Olkoon G ryhmä. Sanomme, että $f : G \to G$ on G:n sisäinen automorfismi, jos jollain $g \in G$, $f(x) = gxg^{-1}$ kaikilla $x \in G$. Näytä, että G:n sisäiset automorfismit muodostavat G:n kaikkien automorfismien ryhmän normaalin aliryhmän.

3. Etsi luvun $6 + 12i$ alkutekijähajotelma renkaassa $\mathbf{Z}[i]$ (muista perustella vastauksesi).

4. Olkoon E polynomin $X^4 - X^2 - 2$ juurikunta kunnan $\mathbf{Q}$ suhteen. Etsi E:lle (eli $\mathbf{Q}$-algebralle E) kanta.

5. Olkoon K kunta, E kunnan K laajennus ja $a \in E$ algebrallinen kunnan K suhteen. Näytä, että $K[a]$ on kunta. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että $K[a]$ on kokonaisalue.

Algebra II

Loppukoe 19.12.2007

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa.)

1. Näytä, että joukon $\{1, 2, 3\}$ symmetrinen ryhmä on ratkeava ja päättele tästä, että jos $f \in \mathbf{Q}[X]$ on astetta 3, niin yhtälö $f(x) = 0$ on algebrallisesti ratkeava.

2. Olkoon G ryhmä, jossa on 25 alkiota ja E G-joukko, jossa on 32 alkiota. Näytä, että löytyy $a \in E$ jolla $G_a = G$.

3. Olkoon $A = \mathbf{Z}[i]$ Gaussin kokonaislukujen rengas. Näytä, että $X^3 + (2i - 4)X^2 + (3 + i)X + (2i - 4)$ on jaoton renkaassa $A[X]$.

4. Oletetaan, että K ja K' ovat kuntia, $\phi : K \to K'$ on isomorphism, $f = \Sigma_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ ei ole vakio, $g = \phi(f) = \Sigma_{i=0}^{n} \phi(a_i) X^i \in K'[X]$, E on f:n juurikunta ja F on g:n juurikunta. Näytä, että löytyy isomorfismi $\psi : E \to F$, joka laajentaa ϕ:tä (eli $\psi \restriction K = \phi$). (Vihje: Todista väite induktiolla polynomin f asteen suhteen.)

5. Oletetaan, että K on kunta, jonka karakteristika on 0, $f \in K[X]$ on astetta $n > 0$ ja jaoton ja E on K:n algebrallisesti suljettu laajennus. Näytä, että f:llä on E:ssä täsmälleen n kappaletta juuria.

Algebra II

Loppukoe 4.3.2008

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa.)

1. Olkoon G ryhmä, H G:n normaali aliryhmä ja $a \in G$. Määritellään $f_a : H \to G$ niin, että kaikilla $x \in H$, $f_a(x) = axa^{-1}$. Näytä, että f_a on ryhmän H automorfismi.

2. Etsi kaikki ryhmät, joissa on täsmälleen 6 alkiota. (Perustele vastauksesi huolella.)

3. Näytä, että $\mathbf{Q}[i] = \{x + yi|\ x, y \in \mathbf{Q}\}$ on isomorfinen Gaussin kokonaislukujen renkaan $\mathbf{Z}[i] = \{x + yi|\ x, y \in \mathbf{Z}\}$ jakokunnan kanssa.

4. Olkoon $A = \mathbf{Z}[i]$ Gaussin kokonaislukujen rengas. Näytä, että $X^3 + (2i - 4)X^2 + (3 + i)X + (2i - 4)$ on jaoton renkaassa $A[X]$.

5. Olkoon K kunta, jonka karakteristika on 0, Ω sen algebrallinen sulkeuma ja $E \subseteq F \subseteq \Omega$ kunnan K laajennuksia niin, että F on normaali. Näytä, että jos $Gal(F/E)$ on $Gal(F/K)$:n normaali aliryhmä, niin E on K:n normaali laajennus. (Vihje: Näytä ensin, että jos väite ei päde, niin löytyy $f \in Gal(F/K)$ ja $a \in F - E$ joilla $f(a) \in E$ ja huomaa, että $[E(a) : E] \geq 2$.)

Algebra II

Loppukoe 13.5.2008

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa.)

1. Olkoon G äärellinen ryhmä, E G-joukko, $a \in E$, G_a alkion a kiinnittäjä ja Ga alkion a rata. Näytä, että $Card(G) = Card(G_a)Card(Ga)$, missä $Card(X)$ tarkoittaa joukon X alkioiden lukumäärää.

2. Etsi kaikki ryhmät G, joissa on täsmälleen 6 alkiota. (Vihje: Huomaa ensin (eli todista), että jos x:n, y:n ja xy:n kaikkien kertaluku on 2 niin x ja y kommutoivat keskenään ja tarkastelemalla aliryhmää $< x, y >$ päättele tästa, että 6 alkion ryhmässä on alkio a, jonka kertaluku on 3. Nyt muista, että jos $(G : H) = 2$ niin H on G:n normaali aliryhmä ja huomaa, että jos $x \in G- < a >$, niin $b = x^3 = xx^2 \notin < a >$ ja b:n kertaluku on 2. Lopuksi tarkastelemalla konjukointia päättele miten laskutoimitus voi toimia.)

3. Näytä, että kompleksilukujen kunnan alirengas $A = \{x + yi | \; x, y \in \mathbf{Q}\}$ on isomorfinen alirenkaan $B = \{x + yi | \; x, y \in \mathbf{Z}\}$ jakokunnan kanssa.

4. Olkoot $K \subseteq E$ kuntia ja $a \in E$ algebrallinen K:n suhteen. Näytä, että $K[a]$ on kunta. (Vihje: Tehtävässä voi pitää tunnettuna että R/I on kunta kun I on vaihdannaisen renkaan R maksimaalinen ideaali.)

5. Olkoon E polynomin $X^3 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$ juurikunta. Etsi E:lle kanta ja päättele tästä, että E:n Galois'n ryhmä $Aut(E/\mathbf{Q})$ $(=Gal(E/\mathbf{Q}))$ kunnan $\mathbf{Q}$ suhteen on isomorfinen kolmen alkion joukon symmetrisen ryhmän kanssa.

Algebra II

Loppukoe 12.6.2008

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa.)

1. Olkoon p alkuluku ja G ryhmä, jossa on p^n alkiota jollain $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Näytä, että G:n keskuksessa on enemmän kuin yksi alkio. (Vihje: Tarkastele konjukaattiluokkia.)

2. Oletetaan, että $f \in \mathbf{Z}[X]$ on jaoton renkaassa $\mathbf{Z}[X]$ ja $deg(f) \geq 1$. Näytä, että f on jaoton myös renkaassa $\mathbf{Q}[X]$. (Vihje: Tehtävässä saa käyttää tietoa, että kahden primitiivisen polynomin tulo on primitiivinen.)

3. Olkoon K kunta, $f \in K[X]$ jaoton, $deg(f) = n$ ja I f:n virittämä renkaan $K[X]$ ideaali. Näytä, että $\{X^i/I \mid i < n\}$ on K:n kuntalaajennuksen $K[X]/I$ kanta (missä $a \in K$ ja $aX^0/I \in K[X]/I$ on samaistettu).

4. Olkoon E kunnan K algebrallinen laajennus ja F kunnan E algebrallinen laajennus. Näytä, että F on K:n algebrallinen laajennus.

5. Olkoon K kunta, jonka karakteristika on 0, Ω sen algebrallinen sulkeuma ja $E \subseteq F \subseteq \Omega$ kunnan K laajennuksia niin, että F on normaali. Näytä, että jos $Aut(F/E)$ $(=Gal(F/E))$ on $Aut(F/K)$:n normaali aliryhmä, niin E on K:n normaali laajennus. (Vihje: Näytä ensin, että jos väite ei päde, niin löytyy $f \in Aut(F/K)$ ja $a \in F - E$ joilla $f(a) \in E$ ja huomaa, että $[E(a) : E] \geq 2$.)

Algebra II

Loppukoe 14.8.2008

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa.)

1. Todista Caylen lause: Jokainen ryhmä on isomorfinen jonkin permutaatioryhmän eli symmetrisen ryhmän aliryhmän kanssa.

2. Etsi kaikki ryhmät G, joissa on täsmälleen 6 alkiota. (Vihje: Huomaa ensin (eli todista), että jos x:n, y:n ja xy:n kaikkien kertaluku on 2 niin x ja y kommutoivat keskenään ja tarkastelemalla aliryhmää $< x, y >$ päättele tästa, että 6 alkion ryhmässä on alkio a, jonka kertaluku on 3. Nyt muista, että jos $(G : H) = 2$ niin H on G:n normaali aliryhmä ja huomaa, että jos $x \in G- < a >$, niin $b = x^3 = xx^2 \notin < a >$ ja b:n kertaluku on 2. Alkioiden a ja b etsimisessä voi käyttää myös Syllowin lausetta. Lopuksi tarkastelemalla konjukointia päättele miten laskutoimitus voi toimia.)

3. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $I = \{i \in \mathbb{N}\ i < n\}$ ja X vapaan $\mathbf{Z}$-modulin $\mathbf{Z}^{(I)}$ jokin kanta. Näytä, että joukossa X on täsmälleen n alkiota. (Vihje: Tarkastele vapaata $\mathbf{Q}$-modulia $\mathbf{Q}^{(I)} \supseteq \mathbf{Z}^{(I)}$.)

4. Olkoon $A = \mathbf{Z}[i]$ Gaussin kokonaislukujen rengas. Näytä, että $X^3 + (2i - 4)X^2 + (3 + i)X + (2i - 4)$ on jaoton renkaassa $A[X]$.

5. Etsi polynomi $f \in \mathbf{Q}[X]$ jonka juurikunnalla E on seuraava ominaisuus: $Aut(E/\mathbf{Q})$ $(=Gal(E/\mathbf{Q}))$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ kanssa. (Vihje: Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että (isomorfiaa vaille) ainoat neljän alkion ryhmät ovat $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ja $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ ja huomaa että emme vaadi että polynomi on jaoton.)

Algebra II, loppukoe 12.11.2008
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Olkoot G ja H ryhmiä ja $\phi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ homomorfismi H:n automorfismien ryhmälle. Asetetaan tulo joukossa $G \times H$ kaavalla

$$(g, h) \cdot (g', h') = (gg', h\phi(g)h').$$

Osoita, että tulo määrittelee ryhmän. Konstruoi ei-triviaali normaali aliryhmä N ja selvitä tekijäryhmän G/N rakenne. Kirjoita kolmen alkion permutaatioryhmä S_3 ei-triviaalilla tavalla e.m. tulomuodossa.

2. Olkoon R rengas ja E vasen R-moduli. Olkoon $f : E \to E$ idempotentti endomorfismi, $f \circ f = f$. Osoita, että
1) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im}(Id_E - f)$,
2) $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$,
3) $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$, sekä että kanooninen homomorfismi $\mathrm{Ker} f \bigoplus \mathrm{Im} f \to E$ on bijektio.

3. Mitkä seuraavista polynomeista ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{Z}[X, Y]$, ja miksi:

$$X^3 - Y^3 + 1, X + X^2Y + Y^2, X^5 + YX^3 + Y^2X^2 + Y.$$

4. Olkoon $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}], K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ renkaan A jakokunta ja $N(\alpha) = x^2 - 2y^2$ alkion $\alpha = x + y\sqrt{2} \in K$ normi $(x, y \in Q)$. Osoitettava:
i) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ kaikilla $\alpha, \beta \in K$.
ii) $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$, kun $\alpha \in A$.
iii) Jos $\alpha \in K$, niin $|N(\alpha - a)| < 1$ jollakin $a \in A$.
Pääteltävä, että A on Eukleideen rengas. $(w(a) = |N(a)|.)$

5. Olkoon $\zeta = \sqrt{i} = (1 + i)\sqrt{2}/2$ ja $N = \mathbb{Q}(\zeta)$ polynomin $f = X^4 + 1$ juurikunta $\mathbb{Q}$:n suhteen. Etsi:
i) Galois'n ryhmä $G = Gal(N/\mathbb{Q})$. (Toiminta virittäjällä ζ.)
ii) G:n toiminta N:n alkioilla $\sqrt{2}$ ja $i\sqrt{2}$. (Esitetään kannan $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ avulla.)
iii) G:n aliryhmät ja vastaavat N:n alikunnat.

Algebra II, loppukoe 17.12.2008
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Olkoon G ryhmä ja $\mathrm{Int}(G)$ sen sisäisten automorfismien $g \mapsto aga^{-1}$ muodostama ryhmä. Osoita, että $\mathrm{Int}(G)$ on G :n kaikkien automorfismien $\mathrm{Aut}(G)$ muodostaman ryhmän normaali aliryhmä. Osoita, että $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ on ei-triviaali, kun G on kompleksisten unitaaristen $N \times N$ matriisien muodostama ryhmä.

2. Olkoon G ryhmä ja N sen ratkeava normaali aliryhmä. Osoita, että G on ratkeava jos G/N on ratkeava.

3. Olkoon M $\mathbb{Z}$-moduli jossa jokainen alkio on torsioalkio. Osoita, että $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$.

4. Osoita, että Gausssin kokonaislukualue $\{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ on Eukleideen rengas.

5. Olkoon $\zeta = \sqrt{i} = (1+i)\sqrt{2}/2$ ja $N = \mathbb{Q}(\zeta)$ polynomin $f = X^4 + 1$ juurikunta $\mathbb{Q}$:n suhteen. Etsi:
i) Galois'n ryhmä $G = Gal(N/\mathbb{Q})$. (Toiminta virittäjällä ζ.)
ii) G:n toiminta N:n alkioilla $\sqrt{2}$ ja $i\sqrt{2}$. (Esitetään kannan $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3$ avulla.)
iii) G:n aliryhmät ja vastaavat N:n alikunnat.

Algebra II

Loppukoe 3.3.2009

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä. (Kunnalla tarkoitan aina vaihdannaista kuntaa ja muista perustella vastauksesi.)

1. Olkoon G ryhmä, jolla $x^2 = 1$ kaikilla $x \in G$. Näytä, että G on vaihdannainen.

2. Etsi kaikki ryhmät G, joissa on täsmälleen 4 alkiota.

3. Etsi luvun $8 + i$ alkutekijähajotelma renkaassa $\mathbf{Z}[i]$.

4. Oletetaan, että K ja K' ovat kuntia, $\phi : K \to K'$ on isomorfismi, $f = \Sigma_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ ei ole vakio, $g = \phi(f) = \Sigma_{i=0}^{n} \phi(a_i) X^i \in K'[X]$, E on f:n juurikunta ja F on g:n juurikunta. Näytä, että löytyy isomorfismi $\psi : E \to F$, joka laajentaa ϕ:tä (eli $\psi \restriction K = \phi$).

5. Olkoon $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ja E polynomin $X^4 - 2 \in K[X]$ juurikunta. Määritä $[E : K]$. Mitä tällöin tiedämme E:n Galois'n ryhmästä kunnan K suhteen?

Algebra II

Loppukoe 11.6.2009

Käsittele neljää seuraavista tehtävistä.

1. Todista Caylen lause: Jokainen ryhmä on isomorfinen jonkin permutaatioryhmän eli symmetrisen ryhmän aliryhmän kanssa.

2. Olkoon G ryhmä, jossa on 35 alkiota ja E G-joukko, jossa on 23 alkiota. Näytä, että löytyy $a \in E$ jolla $G_a = G$ (G_a on a:n kiinnittäjä).

3. Etsi luvun $24 + 15\sqrt{2}$ alkutekijähajotelma renkaassa $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

4. Olkoon $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $I = \{i \in \mathbb{N}\ i < n\}$ ja X vapaan $\mathbf{Z}$-modulin $\mathbf{Z}^{(I)}$ jokin kanta. Näytä, että joukossa X on täsmälleen n alkiota. (Vihje: Tarkastele vapaata $\mathbf{Q}$-modulia $\mathbf{Q}^{(I)} \supseteq \mathbf{Z}^{(I)}$.)

5. Olkoon $f \in \mathbf{Q}[X]$ polynomi, jonka juurikunnan E aste $[E : \mathbf{Q}]$ on 22. Näytä, että f on algebrallisesti ratkeava. (Vihje: Syllow.)