HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik
och statistik
Algebra I
Slutförhör, 12.6.2008

1. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och låt $f : A \to A$ vara den avbildning för vilken $f(1) = f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = 4$ och $f(5) = 1$. Låt vidare $A_0 = \{4\} \subset A$ och $A_n = f^{-1}(A_{n-1})$ för varje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Räkna upp elementen i mängderna A_n för varje $n \geq 1$.

2. Utred om talet $2008^{2008} + 2006$ är divisibelt med talet 13.

3. Låt H och K vara undergrupper till den multiplikativa gruppen G. Bevisa: Om det finns sådana element $a, b \in G$ att $aH = bK$, så följer att $H = K$.

4. Bevisa att $R = \{m/5^n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ är en underring till ringen $\mathbb{Q}$ av rationella tal. Vilka element är invertibla (dvs. enhetselement) i ringen R?

5. Sök alla odelbara polynom i polynomringen $\mathbb{Z}_2[x]$' vilkas gradtal är högst tre (det borde finnas 5 st polynom av denna typ). Undersök om polynomet $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ av fjärde graden är odelbart.