Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Loppukoe 9.8.2007

1. Tutki, onko joukko $\{1, -1, i, -i\}$ ryhmä, kun laskutoimituksena on kompleksilukujen kertolasku.

2. Ratkaise yhtälö $x^2 - 5x + 6 = 0$
   (a) $\mathbf{Z}_7$:ssä,
   (b) $\mathbf{Z}_{10}$:ssä.
   (*Ohje*: Jos merkitään $P(x) = x^2 - 5x + 6$, niin yhtälö $P(x) = 0$ ratkaistaan renkaassa $\mathbf{Z}_n$ helpoimmin kokeilemalla millä $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pätee $P(x) \equiv 0 \pmod{n}$.)

3. Osoita, että rengas R on kommutatiivinen, jos ja vain jos

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{ kaikilla } x, y \in R.$$

4. Renkaan R aitoa ideaalia P sanotaan *alkuideaaliksi*, jos P täyttää ehdon $a, b \in R$, $ab \in P \Rightarrow a \in P$ tai $b \in P$. Todista, että kommutatiivisen renkaan maksimaalinen ideaali on alkuideaali. (*Ohje*: Tarkastele jäännösluokkarengasta (tekijärengasta) R/P. Muista, että kunta on kokonaisalue.)

5. Olkoon $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ ja $a \in \mathbf{R}$. Palautetaan mieleen, että

$$(x - a) \text{ jakaa polynomin } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0.$$

Todista, että

$$(x - a)^2 \text{ jakaa polynomin } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = 0 \text{ ja } f'(a) = 0.$$

(Merkintä $f'(a)$ tarkoittaa $f(x)$:n derivaattaa pisteessä a. Palautetaan mieleen tulon derivoimiskaava $(fg)' = fg' + f'g$.)

Algebra I
Loppukoe
24.1. 2008

1. Etsi lukujen 901 ja 257 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

2. Ratkaise yhtälö $a \circ x \circ b = c$ joukon $\{1,2,3,4\}$ määräämässä permutaatioryhmässä S_4, kun

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (*teoria*) Määrittele ryhmän $(G,\cdot)$ *normaali aliryhmä* H, sekä tekijäryhmä G/H ja sen laskutoimitus. Perustele miksi tekijäryhmän laskutoimitus on hyvin määritelty (ts. ei riipu edustajien valinnasta).

4. Ratkaise yhtälö $1 + x + x^2 + x^3 = 0$ jäännösluokkarenkaissa $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ ja $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$. [*Muistutus.* Jos $P(x) = 1+x+x^2+x^3$, niin renkaassa $\mathbf{Z}_p$ ratkaistaan yhtälö $P(x) = 0$ helpoiten kokeilemalla millä arvoilla $a \in \{0, \dots, p-1\}$ pätee $P(a) \equiv 0 \pmod p$.]

5. Osoita, että lukurenkaat $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} : m,n \in \mathbf{Z}\}$ ja $\mathbf{Z}[\sqrt{3}] = \{m + n\sqrt{3} : m,n \in \mathbf{Z}\}$ eivät ole isomorfiset, kun laskutoimitukset ovat reaalilukujen indusoima yhteenlasku ja tulo. [*Vihje:* Tee vastaoletus, että on olemassa rengashomomorfismi $f : (\mathbf{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot) \to (\mathbf{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$. Kirjoita $f(\sqrt{2}) = m + n\sqrt{3}$ sopivilla $m, n \in \mathbf{Z}$, ja tutki alkiota $f(2)$. Tehtävässä saa pitää tunnettuna, että $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ ovat irrationaalilukuja.]

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe, 13.5.2008

1. Onko olemassa sellaisia kokonaislukuja x ja y, että $341103\,x + 251062\,y = 1$?

2. Määrittelemme joukossa $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ relaation $\sim$ asettamalla $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$ täsmälleen silloin, kun on olemassa joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatio φ (siis $\varphi \in S_3$), jolla $y_k = x_{\varphi(k)}$ kaikilla $k \in \{1, 2, 3\}$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Määritä $\mathbb{R}^3$:n alkioiden $(0, 0, 1)$ ja $(0, 1, 2)$ ekvivalenssiluokat.

3. Olkoon $X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Kun $p, q \in X$, olkoon

   $$p \top q = \text{ luvun } p + q - 2 \text{ suurin alkutekijä.}$$

   Taulukoi luvut $p \top q$ kaikilla $p, q \in X$ ja totea näin, että $\top$ on laskutoimitus joukossa X. Osoita, että X:ssä on $\top$:n suhteen neutraalialkio ja jokaisella X:n alkiolla on käänteisalkio. Onko $(X, \top)$ ryhmä?

4. Osoita, että renkaan R *keskus* $C(R) = \{a \in R \mid ab = ba \text{ kaikilla } b \in R\}$ on R:n alirengas.

5. Olkoon I polynomin $x^2 - 3$ virittämä polynomirenkaan $\mathbb{Q}[x]$ ideaali ja $f = x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Osoita, että $f + I$ on kääntyvä jäännösluokkarenkaassa $\mathbb{Q}[x]/I$, ja määritä sen käänteisalkio.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe, 12.6.2008

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $f : A \to A$ se kuvaus, jolla $f(1) = f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = 4$ ja $f(5) = 1$. Olkoon edelleen $A_0 = \{4\} \subset A$ ja $A_n = f^{-1}(A_{n-1})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Luettele joukon A_n alkiot jokaisella $n \geq 1$.

2. Selvitä, onko luku $2008^{2008} + 2006$ jaollinen luvulla 13.

3. Olkoot H ja K multiplikatiivisen ryhmän G aliryhmiä. Osoita: Jos on olemassa sellaiset $a, b \in G$, että $aH = bK$, niin $H = K$.

4. Osoita, että $R = \{m/5^n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ on rationaalilukujen renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas. Mitkä alkiot ovat kääntyviä (eli yksiköitä) renkaassa R?

5. Etsi polynomirenkaan $\mathbb{Z}_2[x]$ kaikki jaottomat alkiot, joiden aste on korkeintaan kolme (niitä löytynee 5 kpl). Tutki, onko neljännen asteen polynomi $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ jaoton.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe, 14.8.2008

1. Osoita, että reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ relaatio E,
$$xEy \iff y = ax \text{ jollakin } a > 0,$$
on ekvivalenssi. Kuinka monta eri ekvivalenssiluokkaa tällä relaatiolla on?

2. Joukon A laskutoimituksella $\top$ on neutraalialkio, ja
$$a\top(b\top c) = (a\top c)\top b \qquad \text{kaikilla } a, b, c \in A.$$
Osoita, että $\top$ on liitännäinen ja vaihdannainen.

3. Olkoon $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ kaavan $f(m, n) = 3m - 2n$ määrittelemä kuvaus. Osoita, että f on additiivisten ryhmien surjektiivinen homomorfismi, jonka ydin $\mathrm{Ker}(f)$ on alkion $(2, 3)$ virittämä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:n syklinen aliryhmä.

4. Osoita, että $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ on $\mathbb{R}$:n alikunta.

5. Etsi polynomirenkaan $\mathbb{Z}_2[x]$ kaikki jaottomat alkiot, joiden aste on korkeintaan kolme (niitä löytynee 5 kpl). Tutki, onko neljännen asteen polynomi $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ jaoton.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe, 21.10.2008

1. Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ kuvauksia, ja $g \circ f$ injektio. Osoita, että f on injektio. Onko g välttämättä injektio? (Esitä jälkimmäiseen kysymykseen todistus tai vastaesimerkki.)

2. Osoita, että kaava $a * b = |a - b|$ määrittelee joukossa $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ laskutoimituksen $*$. Tutki, onko $*$ a) vaihdannainen, b) liitännäinen, ja c) onko sillä neutraalialkiota.

3. Olkoon G multiplikatiivinen ryhmä. Kun $g \in G$, määrittelemme kuvauksen $c_g : G \to G$ asettamalla $c_g(a) = gag^{-1}$ kaikilla $a \in G$. Todista, että $c_{1_G} = \mathrm{id}_G$, $c_{g_1 g_2} = c_{g_1} \circ c_{g_2}$ kaikilla $g_1, g_2 \in G$, ja c_g on G:n automorfismi (so. isomorfismi $G \to G$) kaikilla $g \in G$.

4. Tarkastellaan funktiorenkaan $\mathbb{R}^{[0,1]}$ alirengasta

$$C([0,1], \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

   Todista, että

$$I = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

   on $C([0,1], \mathbb{R})$:n ideaali ja tekijärengas $C([0,1], \mathbb{R})/I$ on isomorfinen tulorenkaan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kanssa. *Ohje:* Tutki kuvausta $f \to (f(0), f(1))$.

5. Jaa alkutekijöihin polynomi $x^3 - x + 1$ renkaissa $\mathbb{Z}_3[x]$ ja $\mathbb{Z}_5[x]$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe, 22.1.2009

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $f : A \to A$ se kuvaus, jolla $f(1) = f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = 4$ ja $f(5) = 1$. Olkoon edelleen $A_0 = \{4\} \subset A$ ja $A_n = f^{-1}(A_{n-1})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Luettele joukon A_n alkiot jokaisella $n \geq 1$.

2. Selvitä, onko luku $2009^{2009} + 2005$ jaollinen luvulla 13.

3. Olkoot H ja K multiplikatiivisen ryhmän G aliryhmiä. Osoita: Jos on olemassa sellaiset $a, b \in G$, että $aH = bK$, niin $H = K$.

4. Osoita, että $R = \{m/7^n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ on rationaalilukujen renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas. Mitkä alkiot ovat kääntyviä (eli yksiköitä) renkaassa R?

5. Etsi polynomirenkaan $\mathbb{Z}_2[x]$ kaikki jaottomat alkiot, joiden aste on korkeintaan kolme (niitä löytynee 5 kpl). Tutki, onko neljännen asteen polynomi $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ jaoton.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe ti 12.5.2009

1. Ajatellaan kokonaisluvut määritellyiksi luonnollisten lukujen *muodollisina* (eli merkittyinä, ei siis vielä "suoritettavina") erotuksina $m - n$, joille on asetettu identtisyysehto

$$m - n = p - q \iff m + q = n + p.$$

a) Osoita, että tämä symbolilla $=$ merkitty relaatio on todellisuudessa (vain) ekvivalenssi luonnollisten lukujen muodollisten erotusten joukossa.

b) Millä kaavoilla kokonaislukujen yhteenlasku ja kertolasku nyt määritellään luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolaskujen avulla? (Ajattele $\mathbb{Z}$:n laskusääntöjen nojalla, minkälaiset kaavojen on oltava.)

c) Osoita, että tämä kokonaislukujen yhteenlasku on hyvinmääritelty: jos yhteenlaskettavat erotukset vaihdetaan näiden kanssa identtisiin erotuksiin, niin yhteenlaskun tulokseksi saatava erotus on identtinen alkuperäisen yhteenlaskun tuloksen kanssa.

2. Olkoon G (multiplikatiivinen) ryhmä ja H, K sekä L ryhmän G äärellisiä aliryhmiä, joiden kertaluvut eli alkioiden lukumäärät ovat $|H| = 15$, $|K| = 21$ ja $|L| = 35$. Osoita, että $H \cap K \cap L = \{1_G\}$.

3. Olkoon $G = S_{\mathbb{N}}$ luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ permutaatioryhmä eli bijektioiden $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen. Kutsukaamme bijektiota $f \in G$ *melkein identtiseksi*, jos jollekin luvulle $m_f \in \mathbb{N}$ pätee, että $f(n) = n$, kun $n \geq m_f$. Olkoon H melkein identtisten bijektioiden $f \in G$ joukko. Osoita, että H on G:n normaali aliryhmä.

4. Olkoon R rengas, ja olkoon $Y_2(R)$ kaikkien R-kertoimisten 2-rivisten yläkolmiomatriisien $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $(a, b, c \in R,\ 0 = 0_R)$ joukko varustettuna matriisien tavanomaisilla yhteen- ja kertolaskuilla:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}.$$

Pidetään tunnettuna, että tällöin $Y_2(R)$ on rengas (tämä voidaan todistaa aivan kuten $\mathbb{R}$-kertoimisten matriisien tapauksessa; ei todellakaan tarvitse olettaa, että rengas R olisi kommutatiivinen). Osoita nyt, että joukko $J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in R \right\} \subset Y_2(R)$ on renkaan $Y_2(R)$ ideaali ja että tekijärengas $Y_2(R)/J$ on isomorfinen tulorenkaan $R \times R$ kanssa: anna myös tämä isomorfismi. **Ohje.** Sovella renkaiden homomorfialausetta kuvaukseen $f\colon Y_2(R) \to R \times R$, jolla $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto (a, c)$.

5. Esitä polynomi $f = x^4 - 5x^3 + x^2 - 2x - 15$ renkaassa $\mathbb{Q}[x]$ jaottomien polynomien tulona.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Erilliskoe to 11.6.2009

1. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla $f(0) = 1$ sekä kullakin $n \in \mathbb{N}$ rekursiivisesti

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n)/2, & \text{jos } f(n) \text{ on parillinen;} \\ 5f(n)+1, & \text{jos } f(n) \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Osoita, että $f(n+7) = f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja määritä f:n kuvajoukko $f(\mathbb{N})$.

2. Käyttämällä Eukleideen algoritmia **a)** osoita, että luvut 725 ja 147 ovat keskenään jaottomat, ja **b)** etsi kokonaisluvut x ja y, joilla $725x + 147y = 1$.

3. Olkoon G multiplikatiivinen ryhmä. Määritä ne parit $(a, b) \in G \times G$, joilla kuvaus $f\colon G \to G$, jolla $f(x) = axb$ kaikilla $x \in G$, on ryhmähomomorfismi.

4. Olkoon R rengas. Määritä ne parit $(a, b) \in R \times R$, joilla kuvaus $f\colon R \to R$, jolla $f(x) = axb$ kaikilla $x \in R$, on rengashomomorfismi. **Vihje ja varoitus.** Tulos on samantapainen kuin ryhmille tehtävässä 3, mutta todistus on juonikkaampi.

5. Palautetaan mieleen, että jos $n \in \mathbb{N}_+$, niin kokonaislukujen jäännösluokkien modulo n joukko $\mathbb{Z}_n$ on rengas luonnollisten laskutoimitustensa suhteen.

a) Määritä renkaan $\mathbb{Z}_9$ kääntyvien alkioiden multiplikatiivisen ryhmän $G = \mathbb{Z}_9^*$ alkiot ja kertotaulukko.

b) Osoita, että G on syklinen ryhmä, ja anna sopivalla $n \in \mathbb{N}_+$ jokin ryhmäisomorfismi additiiviselta ryhmältä $\mathbb{Z}_n$ ryhmälle G.

c) Määritä G:n kunkin alkion virittämä G:n aliryhmä.