HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Kurssikoe 2, 7.5.2008

1. Olkoon
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3.$$

   a) Luettele muut permutaatioryhmän S_3 alkiot.

   b) Laske $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ kaikilla $\sigma \in S_3$.

   c) Totea, että $K = \{\sigma \in S_3 \mid \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau\}$ on S_3:n syklinen aliryhmä. Mikä alkio virittää K:n?

2. Olkoon G multiplikatiivinen Abelin ryhmä, $G \times G$ tuloryhmä ja $f : G \times G \to G$ kaavan $f(x, y) = xy$ määrittelemä kuvaus. Todista seuraavat asiat:

   a) f on homomorfismi.

   b) f:n ydin on $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, x^{-1}) \mid x \in G\}$.

   c) Kaava $x \mapsto (x, x^{-1})$ määrittelee isomorfismin $G \to \mathrm{Ker}(G)$.

3. Osoita, että $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan $\mathbb{R}$ alirengas.

4. Olkoon R vaihdannainen rengas ja I polynomin $x + 1$ virittämä renkaan $R[x]$ ideaali. Todista renkaiden homomorfialauseen avulla, että tekijärengas $R[x]/I$ on isomorfinen R:n kanssa.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
2. kurssikoe ke 29.4.2009

1. Olkoon G additiivinen Abelin ryhmä. Osoita, että G:n yhteenlasku $f\colon G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x + y$, on ryhmähomomorfismi ja että ryhmät $\mathrm{Ker}(f)$ ja G ovat keskenään isomorfiset.

2. a) Määritä positiiviset kokonaisluvut n, joilla multiplikatiivisen ryhmän $\mathbb{Z}_n^*$ kertaluku on 4.

b) Osoita, että millään positiivisella kokonaisluvulla n ei additiivisen ryhmän $\mathbb{Z}_n$ niiden alkioiden lukumäärä, jotka yksinään virittävät $\mathbb{Z}_n$:n, ole 31.

3. Olkoon R kommutatiivinen rengas. Renkaan R *alkuideaali* on R:n ideaali $P \neq R$, jolla kaikilla $a, b \in R$ ehdosta $ab \in P$ seuraa, että $a \in P$ tai $b \in P$. Osoita, että jos I on R:n ideaali, niin tekijärengas R/I on kokonaisalue jos ja vain jos I on R:n alkuideaali.

4. Jaa polynomi $f = x^4 + 3x^3 + x + 1$ jaottomien tekijöiden tuloksi renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$ osoittamalla ensin, että f:llä ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä, ja tekemällä sitten yrite $f = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$.