Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
2. kurssikoe 4.5.2007

1. Mikä on ryhmän $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ kertaluku? Laske sen jokaisen alkion kertaluku.

2. (a) Ratkaise mielivaltaisessa ryhmässä $(G, \circ)$ yhtälö

$$a \circ x \circ b \circ c \circ x = a \circ b \circ x.$$

(b) Sovella (a)-kohdan tulosta erikoistapaukseen $G = S_3$, kun

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Olkoon $f : R \to R'$ rengashomomorfismi. Todista: Jos I on R:n ideaali, niin $f(I)$ on renkaan $f(R)$ ideaali.

4. Tiedetään, että $R = \{f \mid f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ on kommutatiivinen rengas, kun $f + g$ ja fg määritellään siten, että

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R},$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Osoita, että jos $f \in R$, $f \neq 0_R$, niin f on nollanjakaja tai yksikkö.