Algebra I
2. kursprovet
10.12. 2007

1. Bestäm den undergrupp $\langle 6, 9\rangle$ till $(\mathbf{Z}, +)$ som genereras av mängden $\{6, 9\}$.

2. (i) Definiera vad som avses med en *normal undergrupp* H till gruppen $(G, \cdot)$. (ii) Visa: om H och K är normala undergrupper till gruppen $(G, \cdot)$, så är $H \cap K$ en normal undergrupp till G.

3. Anta att R_1 och R_2 är ringar, samt att $f : R_1 \to R_2$ är en surjektiv ringhomomorfism. Visa att om R_1 är en kommutativ ring, så är R_2 också kommutativ.

4. Lös ekvationen $1+x+x^2+x^3 = 0$ i restklassringarna $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ och $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$.

Algebra I
2. kurssikoe
10.12. 2007

1. Määrää joukon $\{6, 9\}$ virittämä aliryhmä $\langle 6, 9\rangle$ ryhmässä $(\mathbf{Z}, +)$.

2. (i) Määrittele ryhmän $(G, \cdot)$ *normaali aliryhmä* H. (ii) Osoita: jos H ja K ovat ryhmän $(G, \cdot)$ normaaleja aliryhmiä, niin $H \cap K$ on ryhmän G normaali aliryhmä.

3. Olkoot R_1 ja R_2 renkaita, sekä $f : R_1 \to R_2$ surjektiivinen rengashomomorfismi. Näytä, että jos R_1 on kommutatiivinen rengas, niin R_2 on myös kommutatiivinen.

4. Ratkaise yhtälö $1 + x + x^2 + x^3 = 0$ jäännösluokkarenkaissa $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ ja $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$.

Algebra I
2. kursprovet (ersättande)
13.12. 2007

1. Bestäm den undergrupp $\langle 8, 12 \rangle$ till $(\mathbf{Z}, +)$ som genereras av mängden $\{8, 12\}$.

2. (i) Definiera vad som avses med en *normal undergrupp* H till gruppen $(G, \cdot)$. (ii) Visa: om H och K är normala undergrupper till gruppen $(G, \cdot)$, så är $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ också en normal undergrupp till G.

3. Anta att R_1 och R_2 är ringar, samt att $f : R_1 \to R_2$ är en ringhomomorfism. Visa att om I är ett ideal i R_1, så är bilden $f(I)$ ett ideal i ringen $f(R_1)$.

4. Lös ekvationen $1 - x + x^2 - x^3 = 0$ i restklassringarna $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ och $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$.

Algebra I
2. kurssikoe (korvaava)
13.12. 2007

1. Määrää joukon $\{8, 12\}$ virittämä aliryhmä $\langle 8, 12 \rangle$ ryhmässä $(\mathbf{Z}, +)$.

2. (i) Määrittele ryhmän $(G, \cdot)$ *normaali aliryhmä* H. (ii) Osoita: jos H ja K ovat ryhmän $(G, \cdot)$ normaaleja aliryhmiä, niin $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ on myös ryhmän G normaali aliryhmä.

3. Olkoot R_1 ja R_2 renkaita, sekä $f : R_1 \to R_2$ rengashomomorfismi. Näytä, että jos I on renkaan R_1 ideaali, niin sen kuva $f(I)$ on renkaan $f(R_1)$ ideaali.

4. Ratkaise yhtälö $1 - x + x^2 - x^3 = 0$ jäännösluokkarenkaissa $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ ja $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$.