HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Kurssikoe 1, 27.2.2008

1. Esitä (perusteluineen) jokin konkreettinen esimerkki seuraavasta tilanteesta: X on joukko, $A \subset X$ on osajoukko, $f : X \to X$ kuvaus ja $f(f^{-1}(A)) \neq A \neq f^{-1}(f(A))$.

2. Olkoon $X = \{1, 2, 3\}$. Määrittelemme X:n kaikkien osajoukkojen joukossa $\mathcal{P}(X)$ relaation R asettamalla
$$A\,R\,B \iff A \cup \{1\} = B \cup \{1\},$$
kun $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio, ja määritä sen ekvivalenssiluokat.

3. Etsi Eukleideen algoritmin avulla jotkin sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $119m + 172n = 1$. Ratkaise tämän jälkeen kongruenssi $119x \equiv 35 \pmod{172}$.

4. Määrittelemme reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ tavallisen kertolaskun avulla laskutoimituksen $*$ asettamalla
$$x * y = 2xy \qquad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$
Onko $*$ a) vaihdannainen, b) liitännäinen, ja c) onko sillä neutraalialkiota?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikoe ke 25.2.2009

1. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n_0, jolla $n! \geq 2^n$, kun $n = n_0$. Osoita sitten induktiolla, että $n! \geq 2^n$ kaikilla $n \geq n_0$. (Tässä siis $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

2. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ -(n+1)/2, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus. (Kurssillamme $0 \in \mathbb{N}$.)

3. a) Olkoon X joukko ja $E_1 \subset X \times X$ sekä $E_2 \subset X \times X$ joukon X ekvivalenssirelaatioita. Osoita, että myös $E = E_1 \cap E_2$ on joukon X ekvivalenssirelaatio.

b) Määritä E tapauksessa, jossa $X = \mathbb{Z}$ ja

$$xE_1y \iff x \equiv y \pmod{72} \quad \text{sekä} \quad xE_2y \iff x \equiv y \pmod{60}, \quad \text{kun } x, y \in \mathbb{Z}.$$

4. Olkoon X ääretön joukko, $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid A \text{ äärellinen}\}$ joukon X äärellisten osajoukkojen joukko ja $\mathcal{F}_c = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ äärellinen}\}$ joukon X äärellisten osajoukkojen komplementtien joukko. Tutki, voidaanko joukoissa $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}_c$ määritellä laskutoimitus kaavalla $(A, B) \mapsto A \cap B$ ja, jos voidaan, ovatko $(\mathcal{F}, \cap)$ ja $(\mathcal{F}_c, \cap)$ tällöin monoideja.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikokeen 1. korvaava koe pe 27.2.2009

1. Määritellään luvut f_n, kun $n \in \mathbb{N}$, rekursiivisesti seuraavalla tavalla:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ kun } n \geq 1.$$

Osoita induktiolla, että f_{n+1} ja f_n ovat keskenään jaottomat kullakin $n \geq 0$.

2. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} -2n, & \text{jos } n \leq 0, \\ 2n-1, & \text{jos } n > 0, \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus.

3. a) Olkoot X ja Y joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Osoita määritelmän nojalla, että joukon X relaatio R_f, jolle

$$x \, R_f \, y \iff f(x) = f(y), \qquad \text{kun } x, y \in X,$$

on ekvivalenssi.

b) Olkoon $X = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Kun $n \in X$, olkoon $P(n)$ luvun n alkutekijöiden joukko ja $\pi(n) = \sharp P(n)$ luvun n erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Määritä ekvivalenssiluokkien joukot X/R_π ja X/R_P kuvauksille $\pi\colon X \to \mathbb{N}$ ja $P\colon X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

4. Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathcal{F}_-$ kaikkien parittomien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko ja $\mathcal{F}_+$ kaikkien parillisten funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. Tutki, voidaanko joukoissa $\mathcal{F}_-$ ja $\mathcal{F}_+$ määritellä laskutoimitus kuvausten yhdistämisellä eli kaavalla $(f, g) \mapsto f \circ g$ ja, jos voidaan, ovatko $(\mathcal{F}_-, \circ)$ ja $(\mathcal{F}_+, \circ)$ tällöin monoideja.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikokeen 2. korvaava koe ti 3.3.2009

1. Osoita induktiolla luvun $n \geq 1$ suhteen, että jos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, niin

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leq n \cdot \max\{k_1, \dots, k_n\}.$$

(Yllä $\max\{k_1, \dots, k_n\}$ tarkoittaa joukon $\{k_1, \dots, k_n\}$ suurinta lukua.)

2. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} -n/2, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ (n+1)/2, & \text{jos } n \text{ on pariton,} \end{cases}$$

on bijektio, ja määritä sen käänteiskuvaus. Konstruoi lisäksi bijektio $f'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, jolla $f'(10) = 7$. (Kurssillamme $0 \in \mathbb{N}$.)

3. a) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita määritelmän nojalla, että joukon $\mathbb{Z}$ relaatio $E_n \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, jolla

$$xE_ny \iff x - y \in n\mathbb{Z}, \quad \text{kun } x, y \in \mathbb{Z},$$

on ekvivalenssi. (Yllä $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.)

b) Tarkastellaan joukon $\mathbb{Z}$ relaatioita $E = E_4 \cup E_6$ ja $E' = E_4 \cup E_{12}$. Osoita, että toinen niistä on ekvivalenssi, toinen ei.

4. Olkoot $\max(x, y) = \max\{x, y\}$ ja $\min(x, y) = \min\{x, y\}$ joukon $\{x, y\} \subset \mathbb{N}$ suurin alkio ja pienin alkio, kun $x, y \in \mathbb{N}$. Tutki, ovatko $(\mathbb{N}, \max)$ ja $(\mathbb{N}, \min)$ monoideja.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
Kurssikoe 1 (korvaava), 11.6.2009

Koeaika on **1 tunti 55 minuuttia**. Pidä itse huoli siitä, että palautat vastauspaperisi kokeen valvojille viimeistään 1 tunti 55 minuuttia koeajan alkamisen jälkeen.

1. Osoita induktiolla, että luku $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ on jaollinen luvulla 9 kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2. Olkoon X joukko ja $(Y, \leqslant)$ osittain järjestetty joukko sekä $f\colon X \to Y$ injektio. Määritellään joukossa X relaatio $\leqslant$ asettamalla
$$x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y).$$
Osoita, että $(X, \leqslant)$ on osittain järjestetty joukko.

3. Olkoon $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ ja määritellään
$$x \circ y = xy - x - y + 2, \text{ kun } x, y \in G.$$
Osoita, että $(G, \circ)$ on Abelin ryhmä.

4. Olkoon G Abelin ryhmä ja $m \in \mathbb{Z}$. Osoita, että
$$H = \{a \in G \mid a^m = 1_G\}$$
on G:n aliryhmä.