Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. Välikoe
9.6.2004 kello 9.00–12.00

1. Vastaa vain toiseen seuraavista a) tai b):

a) Olkoon $f : X \times Y \to Z$ funktio. Osoita, että f on surjektio jos löytyy sellainen $x \in X$, jolla osittaisfunktio

$$\begin{aligned} f_x : Y &\to Z \\ y &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

on surjektio.

b) Olkoon $f : X \to Y$ funktio ja $A \subset X$ jokin osajoukko. Osoita, että $A \subset f^{-1}(f(A))$ ja anna esimerkki sellaisesta tapauksesta, jossa $A \neq f^{-1}(f(A))$.

2. Olkoon

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 10 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Laske permutaation α^4 kertaluku $\mathrm{ord}(\alpha^4)$ sekä ryhmän $H = \langle \alpha^4 \rangle$ sivuluokkien määrä permutaatioryhmässä S_{10}.

3. Vastaa vain toiseen seuraavista a) tai b):

a) (Teoria) Määrittele tekijäryhmä ja näytä, että se on ryhmä. (Lause IV.2)

b) Tarkastellaan multiplikatiivista ryhmää $(\mathbb{Z}_{21}^*, \cdot)$, missä

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \{\ \bar{a} \mid 0 < a < 21 \text{ ja } \mathrm{syt}(a, 21) = 1\ \}$$

ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$. Määritä ryhmä $H = \langle \overline{4} \rangle$ sekä tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{21}^*/H$ alkiot ja kertotaulu.

4. 12 alkion ryhmiä on isomorfiaa vaille 5 kappaletta, ja näitä edustavat:

1. syklinen ryhmä $\mathbb{Z}_{12}$
2. ryhmä $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$ (suora summa)
3. alternoiva ryhmä A_4
4. kuusikulmion diedriryhmä D_6
5. ryhmä $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ (puolisuora tulo)

Anna huolellinen perustelu sille, miksi todella on niin, etteivät mitkään kaksi yllämainituista ryhmistä voi olla keskenään isomorfiset.

Alta löydät hyödyllistä informaatiota vieraammista ryhmistä, jota saat käyttää hyväksesi. Tarvittavat tiedot syklisestä ryhmästä $\mathbb{Z}_{12}$ ja ryhmästä $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$ joudut täydentämään itse.

Kuusikulmion diedriryhmä D_6:

alkio	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
kertaluku	1	6	3	2	3	6	2	2	2	2	2	2

Ryhmä $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$:

alkio	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
kertaluku	1	6	3	2	3	6	4	4	4	4	4	4

Alternoiva ryhmä A_4:

alkio	1	a	b	ab	c	ac	bc	abc	c^2	ac^2	bc^2	abc^2
kertaluku	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3

Algebra I
Välikoe 1
28.10.2004

1. Olkoon A_i reaaliakselin väli $[1 - 1/i, i]$ kun i on positiivinen luonnollinen luku. Määrää joukot A ja B kun

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

2. Todista induktiolla

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$$

kaikille luonnollisille luvuille n kun $a > 0$. (Tässä siis luvut ovat reaalilukuja ja laskutoimitukset tavalliset reaalilukujen yhteen- ja kertolasku.)

3. Olkoon X äärellinen joukko. Määritellään joukon X potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$ relaatio $\approx$ jossa $A \approx B$ jos joukkojen A ja B alkioiden lukumäärä on sama eli $\sharp A = \sharp B$. Osoita, että $\approx$ on $\mathcal{P}(X)$:n ekvivalenssirelaatio. Mitkä ovat ekvivalenssiluokat kun $X = \{1,2,3\}$?

4. Määritellään luonnollisten lukujen joukossa $\mathbf{N}$ laskutoimitus $\circ$ siten, että

$$n \circ m = \max(n,m) = \text{ suurempi luvuista } m \text{ ja } n.$$

Tutki mitkä ryhmän ominaisuuksista $(\mathbf{N},\circ)$ täyttää eli mitkä seuraavista ovat tosia:
(G0) $\circ$ on $\mathbf{N}$:n laskutoimitus.
(G1) $\circ$ on assosiatiivinen eli liitännäinen.
(G2) On olemassa neutraalialkio.
(G3) Jokaisella alkiolla on käänteisalkio (tämä edellyttää, että vastaus (G2):n kohdalla on myönteinen).
Tutki vielä, onko laskutoimitus kommutatiivinen eli vaihdannainen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikoe 1.3.2006

1. Määritä lukujen 1479 ja 272 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

2. Olkoon $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, kun $n \in \mathbf{N}^*$. Osoita induktiolla, että

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Tutki, onko $(\mathbf{Z}, \cdot)$ ryhmä.

4. Palautetaan mieleen, että jos $n \in \mathbf{N}^*$, niin multiplikatiivinen jäännösluokkaryhmä $(\mathbf{Z}_n^*, \cdot)$ muodostuu joukosta $\mathbf{Z}_n^* = \{\overline{a} \in \mathbf{Z}_n \mid syt(a, n) = 1\}$, laskutoimituksena $\mathbf{Z}_n$:n kertolasku. Muodosta joukko $\mathbf{Z}_{14}^*$, ryhmän $(\mathbf{Z}_{14}^*, \cdot)$ kertotaulu ja määritä (kertotaulun avulla) tämän ryhmän alkioiden käänteisalkiot.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebra I
1. kurssikoe 28.2.2007

1. Määritä lukujen 657 ja 306 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.

2. Osoita induktiolla, että

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Palautetaan mieleen, että jos $n \in \mathbf{N}^*$, niin multiplikatiivinen jäännösluokkaryhmä $(\mathbf{Z}_n^*, \cdot)$ muodostuu joukosta $\mathbf{Z}_n^* = \{\overline{a} \in \mathbf{Z}_n \mid syt(a,n) = 1\}$, laskutoimituksena $\mathbf{Z}_n$:n kertolasku. Muodosta joukko $\mathbf{Z}_9^*$, ryhmän $(\mathbf{Z}_9^*, \cdot)$ kertotaulu ja määritä (kertotaulun avulla) tämän ryhmän alkioiden käänteisalkiot.

4. Olkoon $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, missä $f_i : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*(= \mathbf{R} \setminus \{0\})$, $i = 1,2,3,4$ määritellään siten, että

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = -x, \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}^*.$$

Osoita, että $(G, \circ)$ on ryhmä. (HUOM: Laskutoimituksena on siis *kuvausten yhdistäminen.* Sen liitännäisyyttä voidaan pitää tunnettuna.)