Institutionen för matematik och statistik
Algebra I
Delförhör 1
9.6.2004 kl. 9.00–12.00

1. Svara antingen på a) eller b):

a) Låt $f : X \times Y \to Z$ vara en funktion. Visa att f är surjektiv om det finns ett $x \in X$ sådant att motsvarande partialfunktionen

$$\begin{aligned} f_x : Y &\to Z \\ y &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

är surjektiv.

b) Låt $f : X \to Y$ vara en funktion och $A \subset X$ en delmängd. Visa att $A \subset f^{-1}(f(A))$ och ge ett exempel på en situationen där $A \neq f^{-1}(f(A))$ gäller.

2. Låt

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 10 & 9 & 8 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestäm ordningen $\mathrm{ord}(\alpha^4)$ för permutationen α^4 och antalet sidoklasser i gruppen $H = \langle \alpha^4 \rangle$ i permutationsgruppen S_{10}.

3. Svara antingen på a) eller b):

a) (Teori) Definiera vad en kvotgrupp är och visa att en sådan bildar en grupp. (Sats IV.2)

b) Betrakta den multiplikativa gruppen $(\mathbb{Z}_{21}^*, \cdot)$, där

$$\mathbb{Z}_{21}^* = \{ \bar{a} \mid 0 < a < 21 \text{ och } \mathrm{sgd}(a,21) = 1 \}$$

och $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$. Bestäm gruppen $H = \langle \bar{4} \rangle$ samt elementen och grupptabellen för kvotgruppen $\mathbb{Z}_{21}^*/H$.

4. Icke-isomorfa grupper med 12 element finns det 5 stycken av. De representeras av

1. den cykliska gruppen $\mathbb{Z}_{12}$
2. gruppen $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2$ (direkt summa)
3. den alternerande gruppen A_4
4. hexagonens diedergrupp D_6
5. gruppen $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$ (semidirekt product)

Förklara noggrannt varför det verkligen är så att två grupper ur ovanstående lista inte kan vara isomorfa sinsemellan. Nedan hittar du användbar information om de mera exotiska grupperna. Den kunskap som behövs om den cykliska gruppen $\mathbb{Z}_{12}$ och gruppen $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ måste du generera själv.

Hexagonens diedergrupp D_6:

element	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
ordning	1	6	3	2	3	6	2	2	2	2	2	2

Gruppen $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$:

element	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
ordning	1	6	3	2	3	6	4	4	4	4	4	4

Den alternerande gruppen A_4:

element	1	a	b	ab	c	ac	bc	abc	c^2	ac^2	bc^2	abc^2
ordning	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3