Matematiikan laitos
Aksiomaattisen joukko-opin jatkokurssi

Loppukoe 20.1.2004/Huuskonen

1. Oletetaan MA_{ω_1}. Osoita, ettei ole olemassa Suslin-puuta.
2. Osoita, että $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \mathbf{V} = \mathbf{HOD}$.
3. Osoita, että $\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \mathrm{AC}$.
4. Olkoon $\langle P, \Vdash, 1\rangle$ pakotuskäsite sekä φ ja ψ joukko-opin kielen lauseita. Osoita, että $p \Vdash \varphi$, joss pätee $q \Vdash \varphi$ kaikilla sellaisilla ehdoilla $q \Vdash p$, joilla $q \Vdash \psi$ tai $q \Vdash \neg\psi$.
5. Olkoot A ja B äärettömiä joukkoja sekä $P = \{f \mid f : X \to B,\ |X| < \omega,\ X \subseteq A\}$. Määritellään järjestys ehdoille $p, q \in P$ asettamalla $p \Vdash q$, joss $q \subseteq p$. Osoita, että $p \Vdash$ "$|\check{B}| \leq |\check{A}|$" kaikilla $p \in P$.

Matematiikan laitos
Aksiomaattisen joukko-opin jatkokurssi

Loppukoe 16.3.2004/Huuskonen

1. Anna vastaesimerkki, joka todistaa seuraavan väitteen **negaation:**
   Kaikille osittainjärjestetyille joukoille $\langle P, \Vdash \rangle$ ja kaikille tiheille $\langle D_i \subseteq P \rangle_{i<\omega_1}$ on olemassa sellainen filtteri $G \subseteq P$, että $G \cap D_i \neq \emptyset$ kaikilla $i < \omega_1$.

2. Oletetaan, että MA pätee. Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ maksimaalinen melkein erillinen joukkoperhe. Osoita, että $|A| = 2^{\aleph_0}$.

3. Osoita, että unioniaksiooma on totta luokassa **HOD**.

4. Olkoon $\langle P, \Vdash, 1 \rangle$ pakotuskäsite sekä $\varphi(x)$ joukko-opin kielen kaava. Oletetaan, että kaikille P-nimille τ joukko

$$F_\tau = \{p \in P \mid p \Vdash \varphi(\tau)\} \cup \{p \in P \mid p \Vdash \neg\varphi(\tau)\}$$

   on tiheä. Osoita pakotuksen määritelmän perusteella, että joukko

$$F = \{p \in P \mid p \Vdash \exists x \varphi(x)\} \cup \{p \in P \mid p \Vdash \neg\exists x \varphi(x)\}$$

   on tiheä.

5. Olkoon $\mathcal{T} = \langle T, \leq \rangle$ Suslin-puu. Kun $x, y \in T$, asetetaan $x \Vdash y$ joss $y \leq x$. Osoita, että $\Vdash_T$ "$\check{\mathcal{T}}$ ei ole Suslin-puu." (Vihje: Geneerinen joukko on ylinumeroituva oksa.)

Matematiikan laitos
Aksiomaattisen joukko-opin jatkokurssi

Loppukoe 10.8.2004/Huuskonen

1. Osoita, että $\mathbf{OD} = \mathbf{HOD}$ joss $\mathbf{HOD} = \mathbf{V}$.
2. Osoita, että jos $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, niin $2^{\aleph_1} = \aleph_2$.
3. Osoita, että on olemassa ω_1-Aronszajn-puu.
4. Olkoon $\langle P, \Vdash, 1\rangle$ pakotuskäsite sekä φ ja ψ joukko-opin kielen kaavoja. Esitä välttämätön ja riittävä ehto sille, että $1 \Vdash \varphi \vee \psi$. Perustele.
5. Olkoon P kaikkien sellaisten funktioiden f joukko, jotka ovat muotoa $f : n \to \omega_1$ jollakin $n < \omega$. Määritellään $f \Vdash g$ joss $g \subseteq f$. Osoita, että $\Vdash_{P,\Vdash,1}$ "$\bigcup \tilde{G} : \omega \to \check{\omega}_1$ on surjektio", missä $\tilde{G}$ on geneerisen joukon kanoninen nimi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattisen joukko-opin jatkokurssi

Loppukoe 25.10.2005/Huuskonen

1. Oletetaan MA_{ω_1}. Osoita, ettei ole olemassa Suslin-puuta.

2. Olkoon κ sellainen kardinaali, että MA_κ pätee. Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ melkein erillinen joukkoperhe ja $|\mathcal{A}| = \kappa$. Osoita, että $\mathcal{A}$ ei ole maksimaalinen.

3. Osoita, että potenssijoukkoaksiooma on totta luokassa **HOD**.

4. Olkoon $\langle P, \Vdash, 1 \rangle$ pakotuskäsite sekä φ ja ψ joukko-opin kielen kaavoja. Esitä välttämätön ja riittävä ehto sille, että $1 \Vdash \varphi \rightarrow \psi$. Perustele.

5. Olkoon A ylinumeroituva joukko ja P kaikkien sellaisten funktioiden f joukko, jotka ovat muotoa $f : \alpha \rightarrow A$ jollakin $\alpha < \omega_1$. Määritellään $f \Vdash g$ joss $g \subseteq f$. Osoita, että $\Vdash_{P,\Vdash,1}$ "$\bigcup \tilde{G} : \check{\omega}_1 \rightarrow \check{A}$ on surjektio", missä $\tilde{G}$ on geneerisen joukon kanoninen nimi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiom. joukko-opin jatkokurssi

Loppukoe 17.5.2006/Huuskonen

1. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   a) $\mathbf{V} = \mathbf{OD}$.
   b) $\mathbf{V} = \mathbf{HOD}$.
   c) $\mathbf{OD}$ on transitiivinen.
   d) Ekstensionaalisuusaksiooma on totta luokassa $\mathbf{OD}$.
2. Olkoon A joukko ja $B \subseteq A$ äärellinen. Osoita, että $B \in \mathrm{Df}(A, 1)$.
3. Olkoot $x, y \in \mathbf{L}$. Laske $\rho(\{x, y\})$ ja $\rho(\langle x, y \rangle)$, kun $\rho(x)$ ja $\rho(y)$ tunnetaan. Tässä $\rho(x)$ merkitsee pienintä indeksiä α, jolla $x \in L(\alpha + 1)$.
4. Olkoot M numeroituva transitiivinen ZFC:n malli, $\langle P, \Vdash, 1 \rangle \in M$ pakotuskäsite sekä φ ja ψ joukko-opin kielen lauseita. Osoita pakotuksen määritelmästä lähtien, että $p \Vdash \varphi \to \psi$, joss kaikilla sellaisilla ehdoilla $q \Vdash p$, joilla $q \Vdash \varphi$, on olemassa sellainen $r \Vdash q$, että $r \Vdash \psi$.
5. Olkoon M numeroituva transitiivinen ZFC:n malli. Konstruoi pakotuksen avulla mallin M laajennus, jossa on voimassa ZFC ja $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$. Kaikki kurssilla todistetut pakotuksen yleiset ominaisuudet saa olettaa tunnetuiksi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattisen joukko-opin jatkokurssi

Loppukoe 13.6.2006/Huuskonen

1. Pidetään tunnettuna, että on olemassa surjektiivinen luokkafunktio Enod : $\mathbf{ON} \to \mathbf{OD}$ ja että kaikki ZF:n aksioomat pätevät luokassa **HOD**. Osoita, että valinta-aksiooma on voimassa luokassa **HOD**.

2. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät: (Enod tunnettu.)

   a) $\mathbf{V} = \mathbf{HOD}$.

   b) On olemassa luokkabijektio $\mathbf{F} : \mathbf{ON} \to \mathbf{V}$.

3. Olkoon A joukko ja $B \subseteq A$ äärellinen. Osoita, että $B \in \mathcal{D}(A)$.

4. Olkoot M numeroituva transitiivinen ZFC:n malli, $\langle P, \Vdash, 1 \rangle \in M$ pakotuskäsite sekä φ ja ψ joukko-opin kielen lauseita. Osoita pakotuksen määritelmästä lähtien, että $p \Vdash \varphi \vee \psi$, joss kaikilla ehdoilla $q \Vdash p$ on olemassa sellainen $r \Vdash q$, että $r \Vdash \varphi$ tai $r \Vdash \psi$.

5. Olkoon M numeroituva transitiivinen teorian ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ malli. Konstruoi pakotuksen avulla mallin M laajennus, jossa on voimassa ZFC ja $\omega_1^{\mathbf{L}} < \omega_1$. Kaikki kurssilla todistetut pakotuksen yleiset ominaisuudet saa olettaa tunnetuiksi.

Aksiomaattisen joukko-opin jatkokurssi
Loppukoe 24.10.2006

Taneli Huuskonen

24. lokakuuta 2006

1. Oletetaan $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Osoita, että yleistetty kontinuumihypoteesi pätee.

2. Oletetaan, että on olemassa sellainen ordinaali α, että $L(\alpha)$ on ZFC:n malli. Osoita, että jos α on pienin tällainen ordinaali, niin mallissa $L(\alpha)$ on totta, ettei ZFC:llä ole transitiivista joukkomallia.

3. Oletetaan Martinin aksiooma. Olkoon κ sellainen ääretön kardinaali, että $\kappa < 2^{\aleph_0}$ ja olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ sellainen melkein erillinen joukkoperhe, että $|\mathcal{A}| = \kappa$. Osoita, että on olemassa sellainen ääretön $B \subseteq \omega$, että $A \cap B$ on äärellinen kaikilla $A \in \mathcal{A}$.

4. Olkoot φ ja ψ joukko-opin lauseita, M numeroituva transitiivinen ZFC:n malli sekä $\mathbb{P} \in M$ pakotuskäsite. Määritä välttämätön ja riittävä ehto sille, että
$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \vee \psi$$
kun tiedetään, milloin $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ ja milloin $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi$.

5. Olkoon $P = {}^{<\omega_1}2$. Asetetaan $p \Vdash q$ joss $q \subseteq p$. Osoita, että $\Vdash_{\mathbb{P}} 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. (Vihje: Jos G on geneerinen, voit määritellä surjektion $g : \omega_1 \to \mathcal{P}(\omega)$ seuraavasti: $g(\alpha) = \{n < \omega \mid \alpha + n \in \bigcup G\}$.)