Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattinen joukko-oppi

Loppukoe 3.4.2008/Huuskonen

Tehtävissä saa käyttää valinta-aksioomaa.

1. Olkoon n luonnollinen luku sekä $f : n \to n$ aidosti kasvava funktio. Osoita, että f on identtinen kuvaus.

2. Mitkä seuraavista ominaisuuksista ovat voimassa kaikille ordinaaleille α, β, γ? Perustele lyhyesti (vastaesimerkki tai vihje todistuksesta, esim. "induktio δ:n suhteen").

   a) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

   b) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

   c) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

   d) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

3. Osoita, että kaikille äärettömille kardinaaleille κ ja λ pätee $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$. (Vihje: Tapaus $\kappa < \lambda$ on peruskardinaaliaritmetiikkaa.)

4. Olkoon κ säännöllinen ylinumeroituva kardinaali sekä $C_\alpha \subseteq \kappa$ cub-joukkoja, kun $\alpha < \kappa$. Olkoon edelleen
$$D = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in \bigcap_{\beta < \alpha} C_\beta\}.$$
Osoita, että $D \subseteq \kappa$ on cub.

5. Osoita, että joukon transitiivisuus on absoluuttinen käsite. (Δ_0-kaavojen absoluuttisuutta voi pitää tunnettuna.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattinen joukko-oppi

Loppukoe 12.6.2008/Huuskonen

Tehtävissä saa käyttää valinta-aksioomaa.

1. Olkoon n luonnollinen luku sekä $f : n \to n$ funktio. Osoita, että f on injektio, joss f on surjektio.

2. Mitkä seuraavista ominaisuuksista ovat voimassa kaikille ordinaaleille α, β, γ? Perustele lyhyesti (vastaesimerkki tai vihje todistuksesta, esim. "induktio δ:n suhteen").

   a) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

   b) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

   c) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

   d) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

3. Osoita, että kaikille äärettömille kardinaaleille κ pätee $\kappa^{\operatorname{cf} \kappa} > \kappa$.

4. Olkoon κ ylinumeroituva kardinaali, ja kun $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$, olkoon $f_\alpha : \kappa \to \alpha$ bijektio. Osoita, että on olemassa sellaiset α, β, että $\kappa \leq \alpha < \beta < \kappa^+$ ja $f_\alpha(0) = f_\beta(0)$. (Vihje: Fodorin lemma.)

5. Osoita, että järjestetty pari on absoluuttinen konstruktio. (Δ_0-kaavojen absoluuttisuutta voi pitää tunnettuna.)