Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattinen joukko-oppi

Loppukoe 14.6.2006/Huuskonen

1. Olkoot α ja β ordinaaleja sekä $f : \alpha \to \beta$ sellainen kasvava surjektio, että $f(\gamma) \geq \gamma$ kaikilla $\gamma < \alpha$. Osoita, että $\alpha = \beta$.

2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia kaikille ordinaaleille α, β ja γ? Perustele lyhyesti (mainitse esimerkiksi muuttuja, jonka suhteen voidaan helposti käyttää transfiniittistä induktiota, tai väitteen vääräksi osoittava vastaesimerkki).

   a) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

   b) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

   c) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;

   d) jos $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$, niin $\alpha = \beta$.

3. Olkoon κ säännöllinen ylinumeroituva kardinaali, $S \subseteq \kappa$ stationaarinen sekä $f : \kappa \times \kappa \to \kappa$ funktio. Osoita, että on olemassa sellainen $\alpha \in S$, että kaikilla $\beta, \gamma < \alpha$ on voimassa $f(\beta, \gamma) < \alpha$.

4. Olkoon α rajaordinaali. Osoita, että $\mathrm{cf}(\alpha)$ on pienin sellainen kardinaali κ, että on olemassa rajoittamaton $A \subseteq \alpha$, jolle $|A| = \kappa$.

5. Osoita, että äärellisyyttä ei voida määritellä Δ_0-kaavalla kaikissa sellaisissa transitiivisissa joukko-opin kielen malleissa M, että $\omega \subseteq M$. (Vihje: Δ_0-kaavalla määriteltävät ominaisuudet ovat absoluuttisia kaikissa transitiivisissa malleissa riippumatta siitä, toteuttavatko ne mitään epätriviaaleja aksioomia.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattinen joukko-oppi

Loppukoe 6.3.2007/Huuskonen

Tehtävissä saa käyttää valinta-aksioomaa.

1. Olkoot α ja β ordinaaleja sekä $f : \alpha \to \beta$ kasvava surjektio. Osoita, että $f(\gamma) \leq \gamma$ kaikilla $\gamma < \alpha$.
2. Osoita, että kaikille äärettömille kardinaaleille κ pätee $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.
3. Osoita, että kaikille äärettömille kardinaaleille κ ja λ pätee $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$. (Vihje: Tapaus $\kappa < \lambda$ on peruskardinaaliaritmetiikkaa.)
4. Olkoot α ja β ordinaaleja sekä $f : \alpha \to \beta$ aidosti kasvava kofinaalinen funktio. Osoita, että $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.
5. Ordinaalia sanotaan *parilliseksi,* joss se on muotoa $2 \cdot \alpha$ (siis **ei** $\alpha \cdot 2$) jollakin ordinaalilla α. Osoita, että ordinaalin parillisuus on absoluuttinen käsite kaikille ZFC:n transitiivisille luokkamalleille. (Vihje: ordinaalin parillisten edeltäjien joukko on Δ_0-määriteltävä.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aksiomaattinen joukko-oppi

Loppukoe 26.1.2006/Huuskonen

Tehtävissä saa käyttää valinta-aksioomaa.

1. Olkoot n luonnollinen luku sekä $f : n \to n$ surjektio. Osoita, että f on injektio.
2. Osoita, että kaikille äärettömille kardinaaleille κ pätee $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.
3. Osoita, että kaikille äärettömille kardinaaleille κ ja λ pätee $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$. (Vihje: Tapaus $\kappa < \lambda$ on peruskardinaaliaritmetiikkaa.)
4. Olkoon κ säännöllinen kardinaali, ja olkoon $f : \kappa \to \kappa$ bijektio. Olkoon edelleen

   $$C = \{\alpha < \kappa \mid f[\alpha] = \alpha\}.$$

   Osoita, että C on cub joukossa κ.
5. Ordinaalia sanotaan *parilliseksi,* joss se on muotoa $2 \cdot \alpha$ (siis **ei** $\alpha \cdot 2$) jollakin ordinaalilla α. Osoita, että ordinaalin parillisuus on absoluuttinen käsite kaikille ZFC:n transitiivisille luokkamalleille. (Vihje: ordinaalin parillisten edeltäjien joukko on Δ_0-määriteltävä.)

Muista kurssikysely! `http://www.mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`